

Au programme des IPhO (en plus du programme de sup) :

- ❖ Spectre des atomes hydrogénoïdes
- ❖ Loi de Wien
- ❖ Loi de Planck (qualitative)
- ❖ Loi de Stephan
- ❖ Relation d'incertitude de Heisenberg pour l'énergie et le temps.

Pré-requis :

- ❖ Notion de propagation d'onde et de mécanique (Terminale)

Présent dans le document et sera vu plus en détail en sup :

- ❖ Propagation d'ondes
- ❖ Mécanique : moment cinétique, forces centrales (en lien avec le modèle de l'atome de Bohr)
- ❖ Thermodynamique : Equilibre thermodynamique, différentes formes de transfert thermique.
- ❖ Mécanique quantique (incertitude de Heisenberg pour la position et la quantité de mouvement).

Bibliographie :

- ❖ Claude Aslangul; **Mécanique quantique Tome 1**
- ❖ Jean-Marc Lévy-Leblond, Françoise Balibar; **Quantique : Rudiments**
- ❖ Bernard Diu, Claudine Guthmann, Danielle Lederer, Bernard Roulet; **Thermodynamique**;
- ❖ Bernard Diu, Claudine Guthmann, Danielle Lederer, Bernard Roulet; **Physique statistique**;
- ❖ Différents cours sur le rayonnement et la loi de Planck, dont celui de Mr Escuriol.

Table des matières

I Rayonnement thermique	2
I.1 Mise en évidence	2
I.1.a) Transport de chaleur	2
I.1.b) Emission	3
I.1.c) Absorption	4
I.2 Introduction des différentes grandeurs	4
I.2.a) Puissance totale et densité spectrale de puissance	5
I.2.b) Densité surfacique de puissance et densité spectrale associée	5
I.2.c) Densité volumique d'énergie et densité spectrale associée.	5
I.2.d) Relation entre u_ν et φ_ν	6
I.3 Rayonnement thermique à l'équilibre	6
I.4 Corps noir	6
I.5 Loi du déplacement de Wien	7
I.6 Un peu d'histoire : du rayonnement du corps noir à la loi de Planck	9
I.7 Loi de Planck	10
I.8 Loi de Stephan	10
I.9 Remarques	11

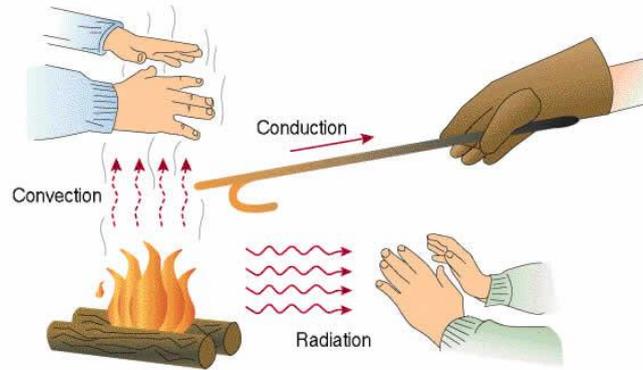
I.10	Application : Effet de Serre	12
I.10.a)	Flux surfacique reçu sur Terre	12
I.10.b)	Température moyenne de la Terre sans atmosphère	12
I.10.c)	Température moyenne de la Terre avec atmosphère (modèle simplifié sans albedo)	13
I.10.d)	Prise en compte de l'albedo	13
II	Relations d'incertitude de Heisenberg	14
II.1	Dimension de h et \hbar et action	14
II.2	Dualité onde-corpuscule	15
II.3	Inégalité spectrale temporelle	15
II.4	Relation d'incertitude	17
II.4.a)	Principe d'incertitude de Heisenberg pour l'énergie et le temps.	17
II.4.b)	Conséquence/Applications	17
II.4.c)	Principe d'incertitude spatial	18
III	Spectre de l'atome d'hydrogène et des ions hydrogénéoïdes	19
III.1	Approche expérimentale	19
III.2	Modèle de Bohr	20
III.3	Rayons des orbites	21
III.4	Energie des orbites ou des niveaux de l'électron.	21
III.5	Retour sur la formule de Rydberg et Ritz	22
III.6	Limitation et modèle plus avancé	22
	Dans ce cours, nous traiterons 3 grandes parties qui peuvent être vues indépendamment :	
☞	le rayonnement thermique en lien avec la thermodynamique statistique, l'électromagnétisme ainsi que la mécanique quantique	
☞	les relations d'incertitude de Heisenberg, fondamentales en mécanique quantique.	
☞	le spectre des atomes hydrogénéoïdes avec une présentation du modèle de l'atome de Bohr (modèle semi-classique (donc semi-quantique) de l'atome pour expliquer leur spectre d'émission ou d'absorption.	

I Rayonnement thermique

I.1 Mise en évidence

I.1.a) Transport de chaleur

Il existe 3 modes de transfert de la chaleur : la **conduction** (transport de chaleur de proche en proche sans mouvement macroscopique de matière (dans les solides principalement)), la **convection** (transport de matière avec mouvement macroscopique de matière (dans les fluides)) et le **rayonnement** qui fait l'objet de cette partie. Ces trois modes de transfert sont illustrés ci-dessous.



Le rayonnement thermique correspond à un transport d'énergie sous forme d'onde électromagnétique.

Il a donc pour origine l'interaction entre la matière et le rayonnement qui se manifestent de différentes façons :

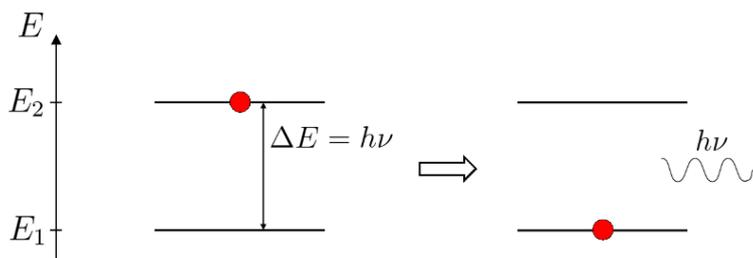
- * **Emission** : Conversion de l'énergie fournie par la source en énergie électromagnétique.
- * **Transmission** : Propagation d'ondes électromagnétiques dans le milieu (qui peut être le vide ou un milieu matériel).
- * **Absorption** : Conversion du rayonnement électromagnétique incident en énergie thermique dans le deuxième corps.

C'est donc les ondes électromagnétiques qui transportent le rayonnement. Comme ces ondes se propagent dans le vide, on peut ressentir la chaleur du Soleil alors qu'il est à des millions de km de la Terre séparé par le vide sidéral !

I.1.b) Emission

Le rayonnement thermique révèle l'agitation chaotique des particules chargées et accélérées que le corps contient. En effet, toute particule chargée et accélérée rayonne c'est-à-dire qu'elle émet une onde électromagnétique. De plus, un corps à la température T contient des particules qui elles-mêmes sont formées de particules chargées. A cause de l'agitation thermique, les particules chargées sont toujours en mouvement et leur accélération n'est jamais nulle. Elles engendrent le rayonnement thermique de l'atome.

Une autre façon de le voir fait intervenir les processus d'émission de photon pour un atome. Par l'agitation thermique, les atomes passent dans des niveaux d'énergie excités et émettent des photons en se désexcitant.



L'ensemble des photons émis forment un spectre continu, comme nous le verrons plus tard.¹

On note φ_e le flux surfacique émis (= puissance surfacique émise) et $P_e = \iint_{\mathcal{S}} \varphi_e dS$ le flux émis (ou puissance émise) à travers une surface \mathcal{S} .

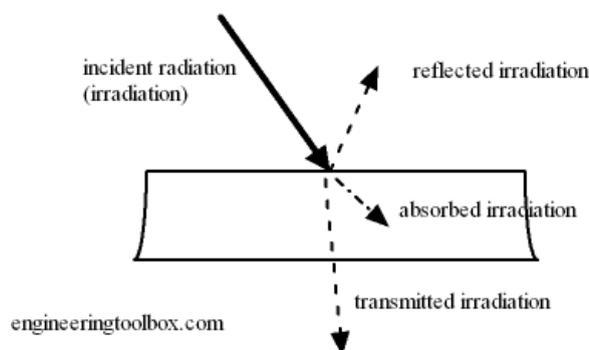
Si le flux surfacique est constant sur la surface \mathcal{S} , on peut écrire plus simplement : $P_e = \varphi_e \mathcal{S}$.

1. Comme les atomes ont une certaine vitesse, les niveaux d'énergie sont décalés par effet Doppler et par excitation toutes les énergies sont représentées.

I.1.c) Absorption

Lorsqu'un rayonnement incident (flux surfacique φ_i) arrive sur un corps, il peut être transmis (φ_t), réfléchi (φ_r) et absorbé (φ_a). Suivant la nature du corps, le rayonnement électromagnétique à une certaine longueur d'onde sera plus ou moins transmis, absorbé ou réfléchi.

(Par exemple, un miroir plan réfléchit presque entièrement la lumière visible alors qu'un vêtement de couleur foncée a tendance à l'absorber).



Par conservation de l'énergie, le flux incident est égal à la somme des flux transmis, réfléchi et absorbé :

$$\varphi_i = \varphi_t + \varphi_r + \varphi_a$$

Parmi les trois, c'est le phénomène d'absorption qui correspond au phénomène inverse de l'émission : l'énergie électromagnétique est convertie en énergie thermique. Les atomes absorbent le rayonnement : ils passent dans des états excités puis effectuent des transitions non radiatives en relâchant de l'énergie thermique pour revenir vers un état d'énergie plus faible.

On note $\alpha = \frac{\varphi_a}{\varphi_i} \leq 1$ le facteur d'absorption qui mesure la proportion de flux absorbé.

Pour un miroir ou des surfaces métalliques $\alpha \ll 1$: le rayonnement n'est que très faiblement absorbé et est en très grande partie réfléchi.

Pour un corps de couleur foncée, α est plus proche de 1 pour les longueurs d'onde du visible : le rayonnement électromagnétique visible est en grande partie absorbé et transformé en énergie thermique : on a plus chaud en été avec un vêtement noir qu'avec un vêtement blanc.

Si on reprend l'exemple de la sensation de chaud au Soleil : le Soleil émet un rayonnement électromagnétique (continu et centré autour de 500 nm) ; ce rayonnement est transporté dans l'espace jusqu'à la Terre (et nous) ; notre corps absorbe le rayonnement du Soleil et le transforme en chaleur.

Pour étudier plus en détail le rayonnement thermique, on a besoin d'introduire de nouvelles grandeurs.

I.2 Introduction des différentes grandeurs

On différencie :

- ◆ les grandeurs spectrales, qui décrivent la dépendance à la fréquence (ou à la longueur d'onde) de manière explicite. Ces grandeurs seront indicées de λ pour la longueur d'onde ou ν pour la fréquence.
- ◆ les grandeurs directionnelles, qui décrivent la dépendance à la direction de manière explicite,
- ◆ les grandeurs totales, intégrées sur l'ensemble des fréquences (ou des longueurs d'onde) et sur toutes les directions (intégrale surfacique ou volumique suivant les cas).

I.2.a) Puissance totale et densité spectrale de puissance

❖ **Puissance totale rayonnée P** : c'est l'énergie électromagnétique totale fournie au milieu extérieur par unité de temps.

❖ **Densité spectrale de puissance P_λ ou P_ν** :

La puissance rayonnée dépend de la longueur d'onde : pour prendre en compte cette dépendance, on se place dans une bande de longueur d'onde $d\lambda$ entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$: dans cette bande, on a une partie de la puissance totale qu'on appelle densité spectrale de puissance notée P_λ telle que la puissance rayonnée sur une bande de longueur d'onde $d\lambda$ s'écrit $dP = P_\lambda d\lambda$.

On retrouve la puissance totale P sur tout le spectre en intégrant par rapport à λ : $P = \int_0^{+\infty} P_\lambda d\lambda$.

On peut également écrire la puissance sur une bande de fréquence $d\nu$: $dP = P_\nu d\nu$ et on retrouve $P = \int_0^{+\infty} P_\nu d\nu$.

On a ainsi : $P_\nu d\nu = P_\lambda d\lambda$ avec P_ν et P_λ les **densités spectrales de puissance**.

On rappelle que λ et ν sont reliés par la relation : $c = \lambda\nu$ où c est la célérité de l'onde électromagnétique dans le milieu.

I.2.b) Densité surfacique de puissance et densité spectrale associée

❖ **Densité surfacique de puissance ou flux surfacique φ** : C'est la puissance (émise ou absorbée) par unité de surface : sur une surface dS , la puissance rayonnée dP est telle que $dP = \varphi dS$.

❖ **Densité spectrale de puissance surfacique φ_ν ou φ_λ** : On se place dans une bande de longueur d'onde $d\lambda$, le flux surfacique $d\varphi$ est tel que $d\varphi = \varphi_\lambda d\lambda$ où φ_λ est la densité spectrale de puissance surfacique. On a aussi $d\varphi = \varphi_\nu d\nu$ pour la fréquence.

On retrouve φ en faisant l'intégrale sur tout le spectre : $\varphi = \int_0^{+\infty} \varphi_\nu d\nu = \int_0^{+\infty} \varphi_\lambda d\lambda$.

Et on retrouve la puissance totale traversant la surface \mathcal{S} en faisant l'intégrale de φ sur la surface :

$$P = \int dP = \iint \varphi dS = \iint_{\mathcal{S}} \int_0^{+\infty} \varphi_\lambda d\lambda dS$$

où dS est l'élément de surface.

On a $P = \varphi S$ si le flux surfacique est constant sur la surface S .

I.2.c) Densité volumique d'énergie et densité spectrale associée.

❖ **Densité volumique d'énergie u** (= énergie par unité de volume) :

La quantité $u dV$ est l'énergie du rayonnement contenue dans le volume dV .

❖ **Densité spectrale volumique d'énergie u_ν ou u_λ** :

La densité spectrale volumique d'énergie u_ν telle que $u_\nu d\nu dV$ est l'énergie du rayonnement contenue dans dV et dans la bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$. On retrouve la densité volumique d'énergie : $u = \int_0^{+\infty} u_\nu d\nu$.

On définit aussi la densité spectrale u_λ telle que $u_\lambda d\lambda dV$, l'énergie du rayonnement contenue dans dV et dans la bande de longueur d'onde $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. On a alors : $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda d\lambda$.

I.2.d) Relation entre u_ν et φ_ν

On peut montrer par des considérations géométriques que u_ν et φ_ν sont reliés par $\varphi_\nu = \frac{c}{4}u_\nu$.

On définit également la luminance L , reliée à la puissance rayonnée par des considérations énergétiques et telle que $u_\nu = \frac{4\pi}{c}L_\nu$ avec L_ν la densité spectrale de luminance.

L_ν , u_ν et φ_ν représentent, à des considérations géométriques près, l'intensité du rayonnement pour une bande de fréquence $d\nu$ autour de ν .

I.3 Rayonnement thermique à l'équilibre

On considère le rayonnement comme un système à part entière² et on cherche l'équilibre thermodynamique du rayonnement à une certaine température T .

L'équilibre thermodynamique est atteint si les grandeurs thermodynamiques qui caractérisent le système, moyennées sur les fluctuations, sont constantes. Pour étudier l'équilibre du rayonnement, on étudie la densité spectrale de puissance : $\varphi_\lambda(\lambda, T)$ ou $u_\lambda(\lambda, T)$ en fonction de la température T d'équilibre.

Cependant un rayonnement seul ne peut atteindre l'équilibre thermodynamique. Il a besoin d'un corps avec lequel interagir. L'équilibre sera atteint si le corps absorbe et réémet la même quantité d'énergie électromagnétique. De plus, les atomes peuvent absorber à une longueur d'onde λ donnée et réémettre à une autre : il y a une redistribution des écarts d'énergie à l'équilibre (en terme de densité d'énergie).

En outre, il faut que la matière qu'on choisit soit en interaction faible et non spécifique avec le rayonnement autour afin de ne pas masquer le caractère propre de ce dernier. Autrement dit, pour déterminer l'équilibre thermodynamique du rayonnement, on a besoin de matière (donc d'un corps matériel) mais sa nature précise ne doit pas intervenir.

Il faut donc concevoir un système matériel dont la surface absorbe intégralement et uniformément toute radiation extérieur. On utilise le concept de corps noir.

I.4 Corps noir

Un corps noir est un système qui absorbe totalement le rayonnement incident de manière uniforme.

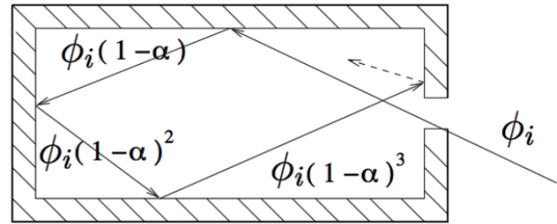
On a donc : $\alpha = \frac{\varphi_a}{\varphi_i} = 1, \forall \lambda$.

S'il est en équilibre à une température T , on a : $\varphi_a = \varphi_e$ puisqu'il émet tout ce qu'il reçoit à l'équilibre (les échanges énergétiques se compensent). Un corps noir est donc également un émetteur parfait puisqu'il réémet toute la puissance qu'il reçoit de **manière isotrope**.

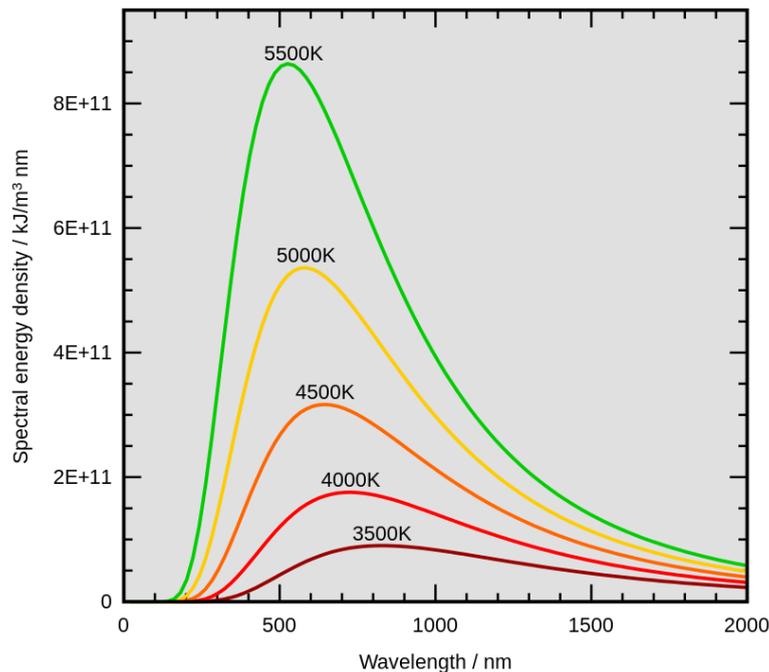
Expérimentalement, un tel système peut être réalisé par une enceinte rigide, maintenue à une température $T = cste$ et percée d'une petite ouverture.

². En physique statistique, on considère le rayonnement comme un gaz de photons : ce gaz interagit avec la matière comme un gaz parfait

Tout rayonnement entrant ne peut en ressortir quelque soit la fréquence. A chaque réflexion, une partie (α) du rayonnement incident est absorbé et l'autre partie ($1-\alpha$) se réfléchit dans l'enceinte. Au bout de n réflexions (n grand), la proportion réfléchi ($1-\alpha$) ^{n} tend vers zéro quelque soit l'enceinte (nature et forme) et quelque soit la longueur d'onde du rayonnement.



Ainsi tout le rayonnement est absorbé, puis réémis. On mesure alors avec un spectromètre la distribution en longueur d'onde du rayonnement émis à l'équilibre. On obtient les courbes suivantes, suivant les différentes températures de l'enceinte donc de la température d'équilibre du rayonnement.



On observe que :

- ⇒ La répartition spectrale de l'énergie ne dépend pas de la forme de l'enceinte ou de la nature (couleur, matériau,...) de ses parois. Donc on étudie bien le rayonnement du système à une certaine température.
- ⇒ **La répartition spectrale u_λ ne dépend que de la température T et de la longueur d'onde λ (ou de la fréquence ν)** (voir l'exemple du rayonnement solaire un peu plus loin).
- ⇒ A T et λ données, l'intensité émise par le corps noir est toujours supérieure à n'importe quel corps.
- ⇒ Plus la température d'équilibre est grande, plus l'aire sous la courbe est importante (donc plus $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda d\lambda$ est grand).
- ⇒ On remarque que la longueur d'onde maximum du rayonnement diminue quand la température d'équilibre augmente. C'est la loi de déplacement de Wien.

I.5 Loi du déplacement de Wien

Sur les courbes de densité spectrale d'énergie du corps noir, on remarque expérimentalement que la répartition spectrale d'énergie passe par un maximum à une longueur d'onde λ_{max} telle que :

$$\lambda_{max}T = cste = 2,898.10^{-3} \text{ K.m} \simeq 3.10^{-3} \text{ K.m.}$$

On remarque en effet sur les courbes ci-dessus que la longueur d'onde maximale du rayonnement est une fonction décroissante de la température.

Le rayonnement se répartit autour de la longueur d'onde λ_{max} . La loi de Wien permet ainsi de déterminer rapidement l'ordre de grandeur des longueurs d'onde des rayonnements émis à partir de la température ou inversement.

Exemples/Applications :

- ❖ La température de surface du corps humain est de l'ordre de 300 K, ce qui donne une longueur d'onde centrale de 10 μm . Le corps humain émet principalement dans l'infrarouge. C'est pour cela qu'on utilise des caméras infrarouge pour détecter des personnes la nuit.
- ❖ Le rayonnement du Soleil, que l'on peut considérer comme un corps noir en première approximation, est centré autour de la longueur d'onde $\lambda_{max} = 500 \text{ nm}$ (d'où sa couleur jaune). Cela donne une température de la surface du Soleil $T = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-7}} = 6000 \text{ K}$. L'étoile Sirius, de couleur bleue, a une longueur d'onde maximale de 290 nm, ce qui donne une température de surface bien plus élevée que celle du Soleil : 10 000 K !
- ❖ Un corps porté à une certaine température T émet de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. Ce rayonnement constitue le rayonnement thermique de ce corps. A température ambiante, les corps émettent principalement dans l'infrarouge (exemple : détecteur de mouvement avec caméra IR). Lorsque sa température augmente, le corps prend une couleur rouge sombre puis brillant (Exemple : "porté au fer rouge") puis jaune puis blanc (dans ce cas, le maximum d'émission correspond au milieu du spectre de la lumière blanche).

Comportement haute fréquence et basse fréquence :

A partir des courbes expérimentales, on peut extraire le comportement attendu pour les hautes fréquences (faibles longueurs d'onde) ou les basses fréquences (fortes longueurs d'onde).

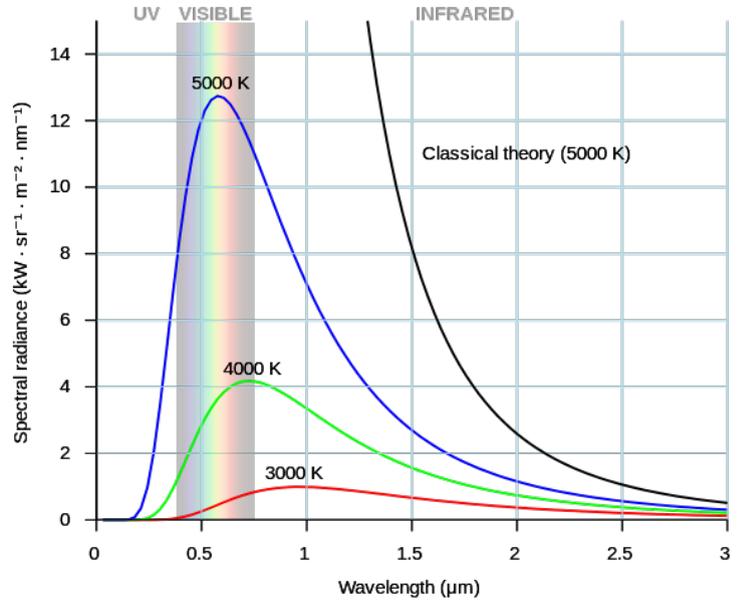
- ◆ A basse fréquence ($\nu \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$), on doit avoir : $u_\nu(\nu, T) \propto \nu^2$,
- ◆ A haute fréquence ($\nu \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0$), la densité volumique spectrale d'énergie $u_\nu(\nu, T) \propto \nu^3 e^{-\nu/T}$.

Historiquement, la mécanique quantique est, entre autre, née pour expliquer ce comportement de manière théorique.

I.6 Un peu d'histoire : du rayonnement du corps noir à la loi de Planck

Le spectre du rayonnement du corps noir était connu et obtenu expérimentalement depuis le milieu du XIX^{ème} siècle. Les physiciens ont cherché pendant longtemps une théorie convenable pour l'expliquer.

Juste avant le début du XX^{ème} siècle, un problème se pose toujours aux physiciens pour l'étude du rayonnement du corps noir. En effet, le premier calcul théorique réalisée par John Rayleigh et James Jeans de l'énergie d'un corps noir ne correspond pas à la loi empirique développée par Wilhelm Wien suite aux résultats expérimentaux. On peut le voir sur la courbe ci-contre où la courbe théorique de l'intensité du rayonnement du corps noir tend vers l'infini vers les basses longueurs d'onde.



Le calcul fait à l'époque par Rayleigh et Jeans considère que les échanges énergétiques entre atomes et rayonnement ont une énergie moyenne $\langle E \rangle = k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann ($k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$). Après un calcul long et fastidieux, la densité spectrale d'énergie trouvée donne les bons résultats aux grandes longueurs d'onde (donc aux faibles fréquences) mais diverge pour des longueurs d'onde plus faible. C'est ce qu'on nomme la "**catastrophe ultraviolette**".

Pour réussir à expliquer théoriquement les propriétés de l'émission thermique du rayonnement électromagnétique d'un corps noir, Max Planck pose l'hypothèse que l'énergie d'échange entre la matière et le rayonnement est multiple d'une valeur minimale, le **quantum d'énergie**, dont l'expression est :

$$E = h\nu,$$

où h la constante de Planck. Cette constante fut d'abord appelée "constante auxiliaire" par Planck car elle n'était pour lui qu'un artifice de calcul. Elle est devenue depuis l'une des constantes fondamentales de la physique. Sa valeur actuellement admise est :

$$h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Depuis novembre 2018, la constante de Planck a été fixée et permet de définir le kilogramme.

Avec l'énergie exprimée ainsi, Planck détermine la forme exacte de l'intensité du rayonnement électromagnétique du corps noir en fonction de la longueur d'onde. Les résultats théoriques de Planck s'accordent avec les résultats expérimentaux comme on le montre dans la suite. Il retrouve notamment une intensité qui tend vers 0 aux basses longueurs d'onde.

I.7 Loi de Planck

La loi de Planck³ qui donne la forme théorique de l'énergie ou de la puissance rayonnée en fonction de T et ν s'écrit de différentes manières suivant les grandeurs utilisées (u_ν ou φ_ν). On a ainsi :

$$\varphi_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad \text{ou} \quad u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

Pour avoir les formules en fonction de la longueur d'onde, on utilise la relation entre les grandeurs spectrales : $A_\nu |d\nu| = A_\lambda |d\lambda|$ où A remplace u ou φ . Or $|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} |d\lambda|$, on en déduit :

$$\varphi_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad \text{ou} \quad u_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

On retrouve bien le comportement attendu à haute et basse fréquence :

◆ A basse fréquence :

$$\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \times \frac{1}{\frac{h\nu}{k_B T} + 1 - 1} \propto \nu^2$$

en utilisant le développement limité de l'exponentielle.

◆ A haute fréquence, le terme exponentiel est très grand devant 1. On a alors :

$$\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)} \propto \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

Ainsi φ_ν tend vers zéro lorsque la fréquence est très grande donc pour les faibles longueurs d'onde.

Les courbes obtenues avec cette formule se superposent sur les courbes expérimentales mesurées pour un rayonnement de corps noir.

Notamment, on peut déterminer la longueur d'onde pour laquelle φ_λ est maximale et retrouver la loi de Wien.

Il suffit de dériver l'expression de φ_λ par rapport à $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ et de chercher les valeurs de x qui annule la dérivée. On trouve l'équation : $e^{-x} + \frac{1}{5}x - 1 = 0$, qui admet une seule solution positive : $x = 4,9651$. On a donc :

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{4,9651 k_B T} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}$$

et on retrouve bien la loi de déplacement de Wien.

I.8 Loi de Stephan

On montre (calcul d'intégrale) que le flux surfacique total φ_e émis sur tout le spectre est donné par la loi de Stephan :

$$\varphi_e = \int d\varphi_e = \int_0^{+\infty} \varphi_\lambda d\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_e = \sigma \mathbf{T}^4}$$

avec $\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ la constante de Stephan-Boltzmann. On retrouve le fait que l'aire sous la courbe qui représente la puissance surfacique est une fonction croissante de T .

3. La démonstration est hors programme des IPhO et est loin d'être triviale.

I.9 Remarques

- ❖ Le corps noir est un concept idéal : en pratique l'absorption totale par une surface n'est observée que pour certaines plages de fréquences (ou de longueurs d'onde).

Par exemple, le verre est :
$$\begin{cases} \text{transparent pour} & \lambda \in [0, 3 \mu\text{m}; 3 \mu\text{m}]; \\ \text{absorbant pour} & \lambda \in [4 \mu\text{m}; 30 \mu\text{m}] \text{ et pour le rayonnement UV.} \end{cases}$$

A température ambiante $T = 300 \text{ K}$, la longueur d'onde centrale du rayonnement est $\lambda_{max} = 3 \cdot 10^{-3} / T = 10 \mu\text{m}$. A cette longueur d'onde, le verre est absorbant, donc le verre peut être considéré comme un corps noir pour le rayonnement émis par le sol ou l'atmosphère (émettant à $T \simeq 300 \text{ K}$).

Pour le rayonnement du Soleil, on a $\lambda_m = 500 \text{ nm}$ et $T = 6000 \text{ K}$. Dans ce cas, le verre est transparent. Il ne se comporte pas comme un corps noir.

Le quartz qui est également de la silice est transparent pour les UV, contrairement au verre. C'est pour cela qu'on utilise des cuves en quartz dans les spectrophotomètre UV-visible, et non des cuves en verre.

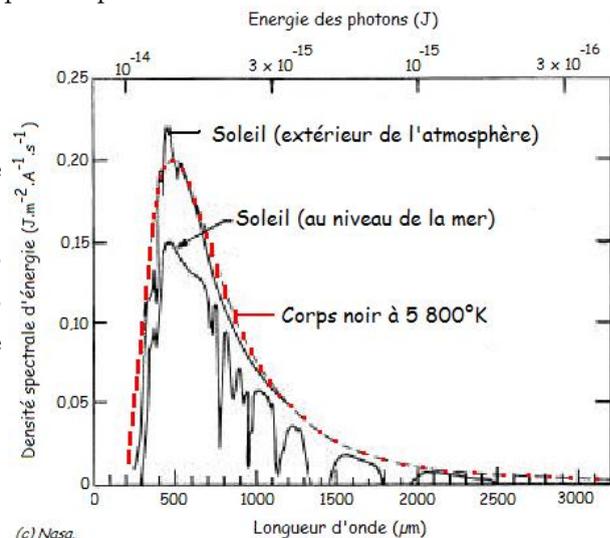
- ❖ Les objets de couleur noire sont des corps qui se comporte comme des corps noirs dans le domaine du visible : ils absorbent toutes les longueurs d'onde du visible (donc toute la lumière blanche soit $\lambda_a \simeq 0,5 \mu\text{m}$). Toute la puissance absorbée est réémise. La réémission dépend de la température du corps considéré : s'il est par exemple à 300 K , il réémet principalement dans l'infrarouge ($\lambda_{max} = 10 \mu\text{m}$). Ainsi :

La puissance émise par le corps noir égale la puissance absorbée mais la composition spectrale des rayonnements absorbés et émis est différente.

Dans l'exemple ci-dessus : absorption dans le visible et émission dans l'infrarouge.

- ❖ La dénomination "corps noir" ne signifie pas que seuls les corps de couleur noir sont des corps noirs. En effet, cette dénomination vient du fait qu'un corps noir absorbe tout le rayonnement. Mais vu qu'il réémet exactement ce qu'il absorbe cela peut être n'importe quel corps.

Par exemple, la surface du Soleil peut être considéré comme un corps noir à la température $T \simeq 6000 \text{ K}$. Son rayonnement suit la loi de Planck. Le rayonnement émis par le centre du Soleil à $T \sim 10^6 \text{ K}$ est totalement absorbé par la surface du Soleil puis réémis dans le visible.



- ❖ Les corps réels ont une densité spectrale d'énergie plus faible que les corps noirs. On appelle l'émissivité ϵ_λ du corps le rapport des densités spectrales d'énergie du corps réel à une certaine température T et du corps noir équivalent à la même température T .

I.10 Application : Effet de Serre

Données :

- ▶ Température de surface du Soleil : $T_S = 5800$ K,
- ▶ Rayon solaire : $R_S = 7,0 \cdot 10^5$ km,
- ▶ Distance moyenne Terre-Soleil : $D_{TS} = 150 \cdot 10^6$ km,
- ▶ Rayon terrestre : 6400 km.

I.10.a) Flux surfacique reçu sur Terre

On considère le Soleil (en surface) comme un corps noir sphérique en équilibre à la température T_S . D'après la loi de Stephan, la puissance totale rayonnée par le Soleil est :

$$P_0 = \iint_{\mathcal{S}_S} \varphi_0 dS = \varphi_0 \times \mathcal{S}_S = \varphi_0 \times 4\pi R_S^2 = \sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2 \simeq 4,0 \cdot 10^{26} \text{ W.}$$

Cette puissance est la puissance totale rayonnée par le Soleil donc dans toutes les directions. La surface de la Terre reçoit une portion de cette puissance totale. A la distance D_{TS} , le flux surfacique venant du Soleil est uniforme sur la sphère de rayon D_{TS} et s'écrit

$$\varphi_S = \frac{P_0}{4\pi D_{TS}^2} = 1,4 \text{ kW.m}^{-2}$$

C'est de l'ordre de grandeur de la puissance surfacique des lasers utilisé en TP.

De plus, la Terre reçoit ce flux surfacique sur une surface égale à πR_T^2 . Ainsi, la fraction de la puissance solaire reçue par la Terre est :

$$P_S = \frac{\pi R_T^2}{4\pi D_{TS}^2} P_0 = 1,8 \cdot 10^8 \text{ GW}$$

En comparaison, l'ordre de grandeur de la puissance produite par une centrale nucléaire est de 1 GW : on a donc l'équivalent de 180 millions de centrales nucléaires!!!

Dans la suite, on cherche à déterminer la température moyenne à la surface de la Terre en partant d'un modèle le plus simple possible et en l'améliorant.

I.10.b) Température moyenne de la Terre sans atmosphère

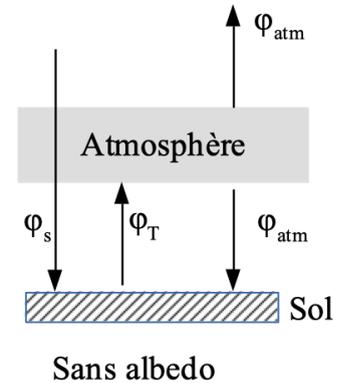
On considère le modèle le plus simple de la Terre sans atmosphère. On considère que la Terre se comporte comme un corps noir en équilibre à la température T . Elle absorbe donc tout le rayonnement solaire et réémet exactement le même rayonnement : $P_T = P_S = 1,8 \cdot 10^8$ GW

Or d'après la loi de Stephan, $P_T = P_S = \varphi_T \times S_T = \sigma T^4 \times 4\pi R_T^2$ soit $T = \left(\frac{P_S}{4\pi R_T^2 \sigma} \right)^{1/4} = 280 \text{ K} = 7^\circ\text{C}$. Ce résultat est un ordre de grandeur correct mais est un peu faible par rapport à la réalité. Il faut donc améliorer le modèle.

I.10.c) Température moyenne de la Terre avec atmosphère (modèle simplifié sans albedo)

L'atmosphère peut être considérée comme un corps noir dans l'infrarouge. Elle est donc absorbante dans l'infrarouge. Ainsi, **le rayonnement terrestre à $T \simeq 300$ K est absorbé** puisque pour $T \simeq 300$ K, $\lambda_m = 10 \mu\text{m}$ se trouve dans l'infrarouge.

L'atmosphère est, par contre, transparente dans le visible donc **elle laisse passer le rayonnement solaire** comme l'indique le schéma ci-contre.



En régime stationnaire, les bilans énergétiques donnent :

$$\begin{cases} \text{Pour la Terre :} & \varphi_T = \varphi_S + \varphi_{atm} \\ \text{Pour l'atmosphère :} & \varphi_T = 2\varphi_{atm} \end{cases}$$

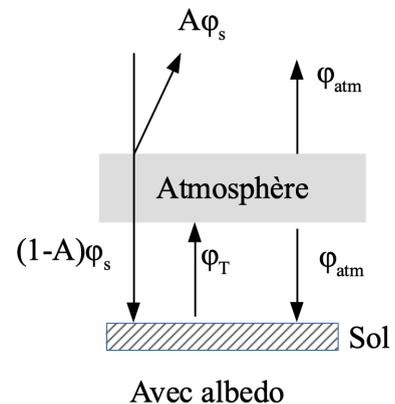
On en déduit : $\varphi_T = \varphi_S + \varphi_T/2$ soit $\varphi_T = 2\varphi_S$.

Donc on double le flux solaire par rapport au cas sans atmosphère : $\sigma T^4 \times 4\pi R_T^2 = 2P_S$ ce qui donne une température de $T_T \simeq 330$ K $\simeq 57^\circ\text{C}$.

Cette valeur est maintenant un peu trop haute.

I.10.d) Prise en compte de l'albedo

Pour ajuster le modèle, on prend en compte l'effet d'albedo (figure ci-contre) : l'atmosphère et la Terre réfléchissent en réalité un certain pourcentage du flux solaire incident. Ce pourcentage noté A est appelé **albedo**. On prend $A = 0,34$ pour l'ensemble Terre-atmosphère.



Le bilan de flux en régime stationnaire s'écrit donc maintenant :

$$\begin{cases} \text{Pour la Terre :} & \varphi_T = (1 - A)\varphi_S + \varphi_{atm} \\ \text{Pour l'atmosphère :} & \varphi_T = 2\varphi_{atm} \end{cases}$$

On en déduit : $\varphi_T = 2(1 - A)\varphi_S$ soit une température de la Terre égale à **300 K** ce qui est une valeur plutôt réaliste, quoiqu'un peu élevée.

Remarques :

- ❖ L'absorption dans l'infrarouge est due à certaines molécules présentes dans l'atmosphère comme H_2O ou CO_2 . Ces gaz à effet de serre ne doivent pas être confondus avec les gaz qui détruisent la couche d'ozone comme certains fréons longtemps utilisés comme fluides frigorigènes. On rappelle que la couche d'ozone nous protège du rayonnement solaire ultraviolet.

- ❖ L'effet de serre décrit ici correspond exactement à ce qu'il se passe derrière une vitre en verre, transparente dans le visible et absorbante dans l'infrarouge. Cela explique les températures élevées en été à l'intérieur d'une automobile ou d'une serre...

II Relations d'incertitude de Heisenberg

Les relations d'incertitude de Heisenberg sont l'un des fondements de la mécanique quantique. Commençons d'abord par identifier dans quel cas on utilise dans le formalisme de la mécanique quantique.

II.1 Dimension de h et \hbar et action

La constante de Planck h est une des constantes fondamentales en mécanique quantique.

La dimension de h (ou de $\hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 1.10^{-34}$ J.s constante de Planck réduite) est une énergie fois un temps ou une quantité de mouvement fois une longueur.

En effet $E = h\nu$ soit $[h] = [\text{Energie}] \times [\text{temps}]$;

ou $\lambda = \frac{h}{p}$ soit $[h] = [\text{longueur}] \times [\text{qté de mvt}]$.

Ainsi en développant la dimension de l'énergie ou la dimension de la quantité de mouvement, on trouve que :

$$[h] = [\hbar] = M.L^2.T^{-1}$$

Cette dimension est une dimension d'**action** ($[A] = M.L^2.T^{-1}$). Une action est une énergie multipliée par un temps, une quantité de mouvement multipliée par une longueur, (ou un moment cinétique multipliée par un angle...)

Par définition : $A = \int E dt = \int p_x dx$. On pourra dans le cadre de ce cours considéré : $A \approx E\Delta t = p \times L$.

L'action est un indicateur précieux pour savoir si le système considéré est dans le domaine de validité de la mécanique quantique. En effet, si l'action caractéristique du système est de l'ordre de grandeur de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ alors la mécanique classique est insuffisante pour décrire le système et il faut utiliser les outils de la mécanique quantique. Par contre, si $A \gg \hbar$ alors l'approche classique suffit amplement.

Exemples :

☞ Montre : d = distance caractéristique = taille des pièces mobile $\sim 10^{-3}$ m,

$m \sim 10^{-3}$ kg et τ = temps caractéristique = 1 s. Ainsi l'action caractéristique est : $A = \frac{md^2}{\tau} \sim 10^{-9}$ J.s = $10^{25}\hbar \gg \hbar$.

On peut décrire une montre avec la mécanique classique.

☞ Atome d'hydrogène : $E = 13,6$ eV = 2.10^{-18} J. On cherche une fréquence caractéristique, pour le spectre de l'atome d'hydrogène, on observe que $\lambda_{min} = 100$ nm donc $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} \sim 2.10^{16}$ s $^{-1}$. Ainsi l'action

caractéristique s'écrit : $A = \frac{E}{\omega} = 10^{-34} \sim \hbar$. La mécanique quantique est nécessaire pour décrire l'atome d'hydrogène.

Les deux équations aux dimensions $[h] = [\text{Energie}] \times [\text{temps}] = [\text{longueur}] \times [\text{qté de mvt}]$ rendent compte de la correspondance spatio-temporelle entre énergie-temps et quantité de mouvement-espace. En effet l'énergie est liée au temps (la conservation de l'énergie est reliée à l'invariance dans le temps) et la quantité de mouvement est liée à la coordonnée d'espace.

II.2 Dualité onde-corpuscule

En mécanique quantique, il faut abandonner le concept d'onde ou de particule. On ne peut pas non plus dire que les particules deviennent des ondes ou que les ondes deviennent des particules lorsqu'on adopte une vision quantique. En mécanique quantique, les particules ou ondes ne sont plus des particules ou des ondes mais sont d'autres objets purement quantique (qu'on peut appeler "quanton" ou "objet quantique" ...) dont l'état est décrit par une fonction d'onde.

Deux relations fondamentales rendent compte de la dualité onde-corpuscule pour la lumière et pour la matière. *Pour la lumière, la relation de Planck-Einstein* relie le temps et l'énergie :

$$E = \hbar\omega = h\nu$$

où l'énergie E est propre au caractère particulaire (l'énergie d'une particule : le photon) alors que la pulsation ω est reliée au concept ondulatoire : $\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda}$. Cette relation s'appelle ainsi car Planck a introduit le quantum d'énergie de lumière $h\nu$ puis Einstein a expliqué l'expérience de l'effet photoélectrique en introduisant la notion de corpuscule de lumière : le photon.

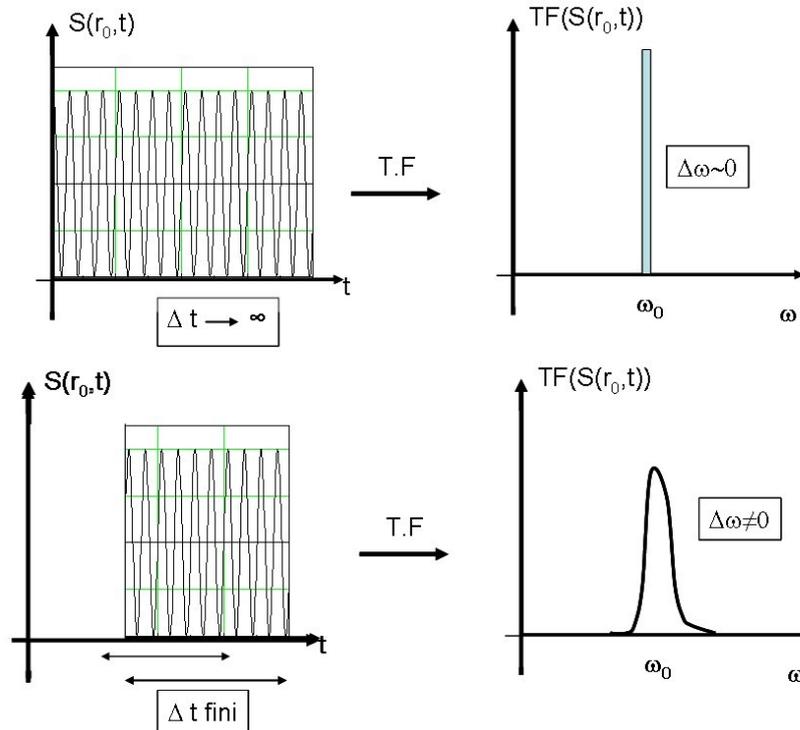
Pour la matière, la conservation de la quantité de mouvement est associée à l'invariance par translation dans l'espace. **La relation de de Broglie** s'écrit :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}$$

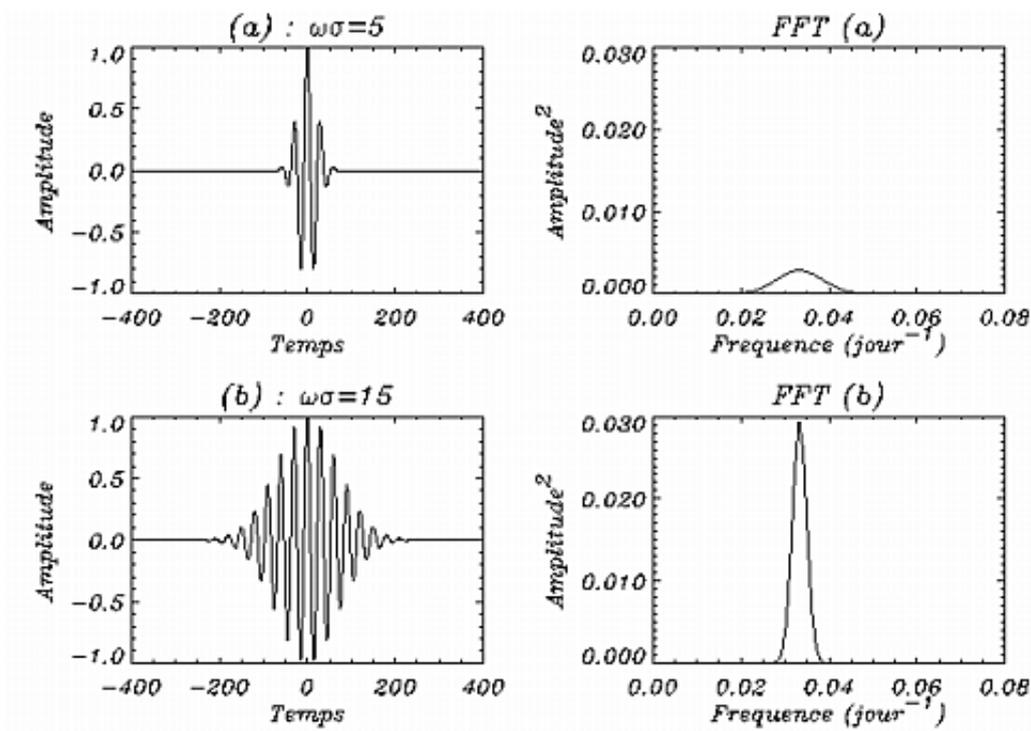
où la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ est propre au caractère particulaire de la matière alors que le vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$ est relié au caractère ondulatoire de la matière : le vecteur \vec{u} donnant la direction et le sens de propagation de l'onde.

II.3 Inégalité spectrale temporelle

Dans le cours d'onde, on aborde le concept d'onde plane harmonique $y(x, t) = a \cos(\omega t - kx)$ qui est une sinusoïde avec une extension temporelle (et spatiale) infinie : la durée caractéristique du phénomène Δt est infinie. Le spectre d'un tel signal est un pic (appelé pic de Dirac) à la pulsation ω (cf figure suivante en haut).



Prenons maintenant un phénomène non harmonique possédant une durée caractéristique Δt . Δt est l'ordre de grandeur pour lequel le phénomène connaît une évolution notable (par rapport à un comportement harmonique). Le spectre d'une fonction non harmonique est continu et a une largeur $\Delta\omega$ caractéristique appelée largeur spectrale (cf figure précédente en bas).



On remarque, sur la figure ci-dessus, que plus la durée caractéristique Δt est faible, plus la largeur spectrale $\Delta\omega$ est grande. On peut montrer que les deux largeurs (temporelle et spectrale) sont reliées par la relation :

$$\Delta\omega\Delta t \gtrsim 1 \quad (1)$$

Cela signifie que plus la durée du phénomène est faible, plus les composantes harmoniques couvrent une gamme étendue.

Entre autre, cette propriété a une application pour les lasers à impulsion courte : pour diminuer le temps caractéristique d'une impulsion (et arriver à des impulsions de l'ordre de la femtoseconde) on étale le spectre du rayonnement avec des éléments dispersifs : on augmente $\Delta\omega$ pour rendre Δt très faible.

II.4 Relation d'incertitude

II.4.a) Principe d'incertitude de Heisenberg pour l'énergie et le temps.

A partir de la relation (1), et de la relation de Planck-Einstein $E = \hbar\omega$, on en déduit :

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

Cette relation donne un ordre de grandeur minimal pour le produit $\Delta E \Delta t$. Un calcul un peu plus poussé (largement hors programme) permet d'établir :

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{ou} \quad \Delta E \times \tau \geq \frac{\hbar}{2}$$

Avec ΔE l'indétermination sur l'énergie de l'objet quantique et $\tau = \Delta t$ est le temps caractéristique pendant lequel le phénomène connaît une évolution notable.

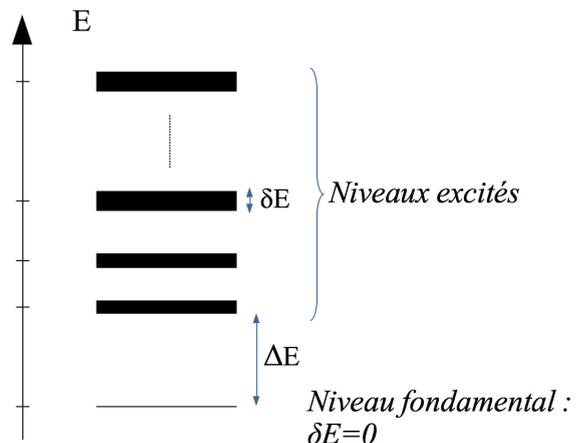
Remarque : on ne peut pas désigner Δt comme l'indétermination du temps ou l'écart-type sur le temps. En effet, le temps est en physique une grandeur bien particulière qui ne peut pas avoir d'écart-type.

II.4.b) Conséquence/Applications

- ↷ Le cas où $\tau \rightarrow \infty$ est appelé cas stationnaire, il correspond à un état stationnaire d'énergie, autrement dit à un état propre (mode propre) pour lequel $\Delta E = 0$. De tels états sont possibles, ce sont les états fondamentaux. Si rien ne vient perturber le système dans son état fondamental, il y reste indéfiniment. On dit de cet état qu'il est stable.
- ↷ Une conséquence de la relation d'incertitude de Heisenberg énergie-temps est la durée de vie des niveaux d'énergie excités des atomes. En effet, lorsqu'un électron passe sur un niveau d'énergie supérieur par rapport au fondamental, il finira toujours par se désexciter (en émettant un photon) au bout d'un certain temps τ appelé durée de vie du niveau. Cela signifie donc que le niveau a une largeur énergétique δE non nulle puisque : $\delta E \sim \frac{\hbar}{\tau}$.

En ordre de grandeur, on a $\tau \sim 10^{-10}$ s. Donc la largeur de l'état excité δE est telle que $\delta E \sim \frac{\hbar}{\tau} = \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24}$ J $\sim 10^{-5}$ eV.

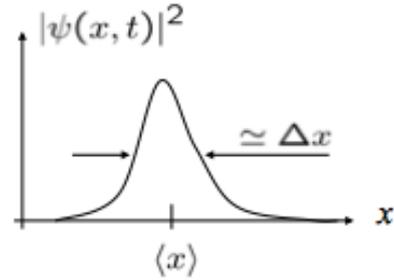
En pratique cependant, on a $\delta E \ll \Delta E$ où ΔE est la différence entre deux niveaux d'énergie (plutôt de l'ordre de l'eV). En première approximation, on pourra négliger la largeur des états excités.



II.4.c) Principe d'incertitude spatial

Pour une particule quantique dont l'état quantique est décrit par la fonction d'onde $\psi(x, t)$, on ne peut avoir accès précisément à la fois à la position x et à la quantité de mouvement (aussi appelée impulsion) p_x de la particule quantique.

En effet, si on mesure la position de plusieurs particules quantiques qui ont la même fonction d'onde (donc le même état) alors on obtient une distribution des positions autour de la position moyenne avec un écart type Δx comme le montre la figure ci-contre. Cela est dû au fait que la fonction d'onde donne accès à la probabilité $p = K|\psi(x, t)|^2$ de trouver une particule avec la position x .

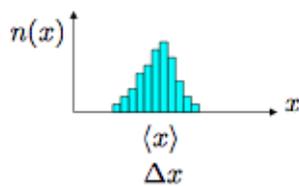


Le même principe s'applique pour connaître la quantité de mouvement de la particule : on ne la connaît pas précisément, mais elle suit une distribution de probabilité centrée sur la valeur moyenne $\langle p_x \rangle$ avec un écart-type Δp_x .

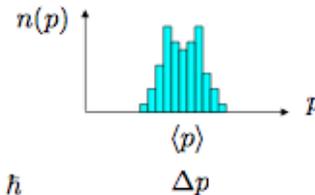
La relation d'incertitude de Heisenberg pour la position et l'impulsion permet de relier les indéterminations sur la position Δx et sur l'impulsion Δp_x de manière analogue avec l'énergie et le temps. Elle s'écrit :

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Mesure de la position sur N particules



Mesure de l'impulsion sur N particules



$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ainsi, connaissant précisément la position x (avec une indétermination Δx proche de zéro), alors la quantité de mouvement ou impulsion ne pourra être connue précisément : $\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2\Delta x}$.

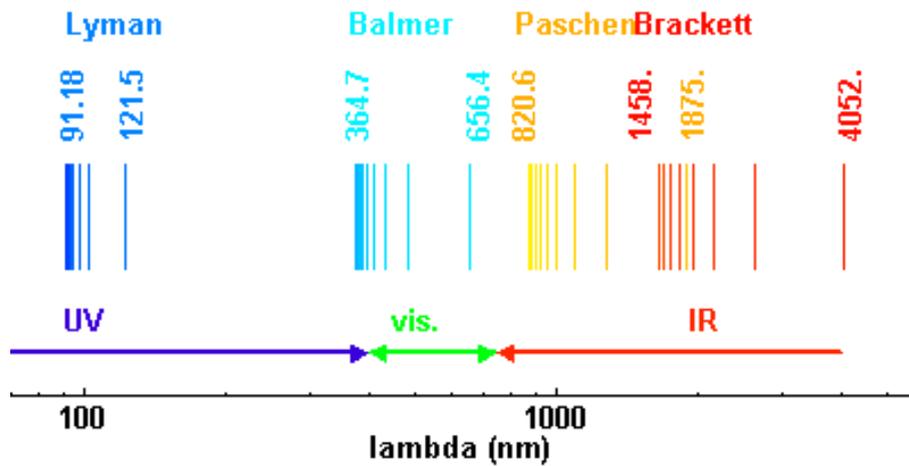
Cette inégalité vient aussi d'une inégalité spectrale : l'extension spatiale d'une onde Δx est liée à sa largeur spectrale Δk par $\Delta x \Delta k \gtrsim 1$. En utilisant $k = \frac{p}{\hbar}$, on trouve l'ordre de grandeur du principe d'incertitude de Heisenberg pour la position et l'impulsion.

III Spectre de l'atome d'hydrogène et des ions hydrogénoïdes

Un ion hydrogénoïde est un ion monoatomique (un cation) ne possédant qu'un seul électron. Il a alors une structure semblable à celle de l'atome d'hydrogène. Seule la charge de son noyau diffère ($+Ze$ au lieu de $+e$ pour H). C'est donc un atome auquel on a arraché tous les électrons sauf un. Comme l'atome d'hydrogène, ces ions suivent le modèle de Bohr décrit plus loin. Les résultats obtenus dans la suite pour l'atome d'hydrogène pourront se généraliser aux ions hydrogénoïdes.

III.1 Approche expérimentale

Depuis le milieu du XIX^{ème} siècle et le développement de la spectroscopie, on peut observer le spectre des atomes. On utilise pour cela un élément dispersif (prisme, réseau) qui sépare les différentes longueurs d'onde du rayonnement. Pour l'atome d'hydrogène, le spectre d'émission obtenu à partir d'une lampe à dihydrogène est le suivant :



Ainsi, on remarque que seules certaines radiations bien particulières sont émises. Le spectre de l'atome d'hydrogène est dit quantifié. Historiquement, c'est d'abord le spectre dans le domaine du visible qui a été observé. Johann Balmer observe et mesure 4 raies d'émission de longueurs d'onde : 656,3 nm, 486,1 nm, 434,0 nm et 410,2 nm. Il trouve une formule empirique, dite de Balmer, qui lie les longueurs d'onde avec un entier $n > 2$:

$$\sigma_n = \frac{1}{\lambda_n} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

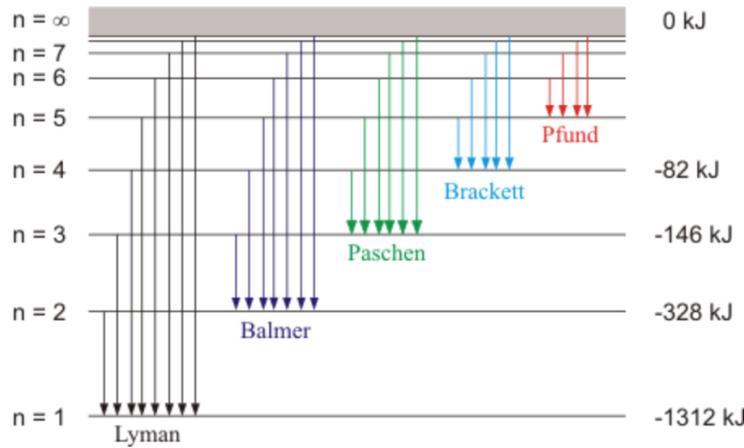
avec $R_H = 1,09677 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ appelée constante de Rydberg et $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ est le nombre d'onde.

Cette formule se généralise ensuite à toutes les longueurs d'onde d'émission avec la formule de Rydberg-Ritz après la découverte d'autres raies dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet.

$$\sigma_{pn} = \frac{1}{\lambda_{pn}} = R_H \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (2)$$

Les différentes valeurs de p donne différentes séries :

- $p = 1$: série de Lyman, émission dans l'ultraviolet
- $p = 2$: série de Balmer, émission dans le visible (656,3 nm, 486,1 nm, 434,0 nm et 410,2 nm)
- $p = 3$: série de Paschen, émission dans l'infrarouge proche
- $p > 3$: émission dans l'infrarouge lointain, série de Brackett et Pfund.



III.2 Modèle de Bohr

L'existence des spectres d'émission pose problème historiquement puisqu'on ne peut pas les expliquer avec la théorie classique. Avec l'avènement de la mécanique quantique et la découverte de la structure de l'atome par Rutherford, les spectres vont pouvoir être expliqués.

Rutherford montre en 1911 que l'atome est constitué d'un noyau très dense chargé positivement au centre et d'électrons de masse beaucoup plus faible qui gravitent autour.

C'est le modèle planétaire de l'atome. Les électrons gravitent autour du noyau comme les planètes autour du Soleil.

Pour expliquer le spectre discret de l'atome d'hydrogène et des ions hydrogénoïdes, Bohr propose en 1913 un modèle basé sur trois postulats de base :

1. Il existe des orbites circulaires stables pour les électrons, c'est-à-dire qu'une fois sur une de ces orbites, l'électron ne rayonne aucune énergie électromagnétique. Il ne décroît donc pas en spirale et peut rester indéfiniment sur cette orbite. De telles orbites sont dites stationnaires. En outre, chacune d'elle correspond à une énergie bien définie de l'électron (on parle alors de niveau d'énergie de l'électron, qui sont ici de valeur négative pour signifier que le système noyau-électron est lié)
2. L'électron peut passer d'une orbite stable à une autre, c'est-à-dire d'un niveau d'énergie E_i à un autre niveau d'énergie E_j , par absorption ou émission d'un photon d'énergie $h\nu = |E_j - E_i|$. L'absorption d'un photon fait ainsi passer l'électron d'une orbite basse (proche du noyau) d'énergie faible à une orbite haute (loin du noyau) d'énergie plus élevée. L'émission d'un photon correspond à l'opération inverse : l'électron passe d'une orbite éloignée de haute énergie à une orbite proche du noyau de plus basse énergie, le surplus d'énergie étant expulsé sous forme d'un photon. Ceci explique pourquoi on observe un spectre d'absorption et un spectre d'émission et pourquoi ils ont les mêmes raies c'est-à-dire les mêmes longueurs d'onde.
3. Pour identifier les orbites stables et les rayons r_n correspondant, il faut introduire une règle de quantification. Cette règle se fait sur le moment cinétique L de l'électron qui caractérise sa rotation autour du noyau. Le moment cinétique L de l'électron (qui s'écrit aussi $L = rp$) est quantifié et est un nombre n entier de fois \hbar :

$$L_n = p_n r_n = n\hbar.$$

Une manière de comprendre cette quantification avec une approche ondulatoire est que l'électron sur son orbite stable, doit interférer constructivement avec lui-même après un tour. Il doit donc parcourir un

nombre entier de fois la longueur d'onde en un tour. On trouve : $2\pi r_n = n\lambda$, soit en remplaçant $\lambda = \frac{h}{p}$, on retrouve la condition de quantification $p_n r_n = n\hbar$.

III.3 Rayons des orbites

Sur une orbite circulaire on peut montrer (cf cours de méca sup) que l'électron a une accélération dirigée vers le centre du noyau et de norme $a = \frac{v^2}{r}$. De plus, la force exercée par le noyau sur l'électron est la force d'interaction coulombienne de norme $F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ dirigée également de l'électron vers le noyau. On a ainsi d'après le PFD (sur l'axe électron-noyau) :

$$ma = F \quad \text{soit} \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{m4\pi\epsilon_0 r}}$$

En remplaçant dans la condition de quantification, on a : $rp = mrv = n\hbar$. En mettant cette expression au carré, on trouve :

$$m^2 r^2 v^2 = m^2 r^2 \frac{e^2}{m4\pi\epsilon_0 r} = \frac{me^2 r}{4\pi\epsilon_0} = n^2 \hbar^2$$

Ainsi les rayons des orbites des électrons sont quantifiés et sont tels que :

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \propto n^2$$

où n est un entier naturel non nul. Pour $n = 1$, on trouve le rayon dit de Bohr, taille typique de l'atome d'hydrogène : $r_1 = a = 53 \text{ pm}$.

III.4 Energie des orbites ou des niveaux de l'électron.

L'énergie de l'électron sur son orbite est la somme de son énergie cinétique et potentielle électrostatique. Elle s'écrit :

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

en remplaçant v^2 par l'expression déterminée ci-dessus. Or, comme les rayons des orbites sont quantifiés, on en déduit que l'énergie est quantifiée et est telle que :

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$

où $E_1 = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}$ est appelée énergie de Rydberg. C'est l'énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène et des ions hydrogénéides.

Pour l'hydrogène, on trouve : $E_1 = -13,6 \text{ eV}$.

Pour les ions hydrogénéoïdes, il faut multiplier e^2 par le numéro atomique Z et on en déduit qu'il faut multiplier l'énergie par Z^2 .

III.5 Retour sur la formule de Rydberg et Ritz

On retrouve bien la formule de Rydberg et Ritz puisque lorsque l'électron passe d'un état $n > p$ à un état p , il émet un photon d'énergie $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. On a ainsi :

$$\Delta E = E_n - E_p = \frac{hc}{\lambda} = E_1 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = -\frac{E_1}{hc} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

On en déduit la valeur théorique de la constante de Rydberg :

$$R_H = -\frac{E_1}{hc} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1,097.10^7 \text{ m}^{-1}$$

III.6 Limitation et modèle plus avancé

Le modèle de Bohr pour l'atome est satisfaisant pour expliquer le spectre de raies des atomes hydrogénides. Cependant, il est insuffisant pour décrire des phénomènes quantiques, comme par exemple, l'effet Zeeman (levée de dégénérescence de niveaux sous l'effet d'un champ magnétique). Un modèle purement quantique de l'atome a été proposé par Erwin Schrödinger en 1926. Dans ce modèle, on ne considère plus les électrons comme des particules mais on modélise l'électron par une fonction d'onde associée à une probabilité de présence.

En effet, la représentation de l'électron comme des petites billes vient d'une transcription de nos perceptions macroscopiques dans le monde microscopique et est loin de la vérité.

Ainsi, dans le modèle de Schrödinger, les électrons sont modélisés par un nuage de probabilité de présence électronique donnée par les orbitales atomiques. Ces orbitales atomiques sont les amplitudes de probabilité de présence qui sont proportionnelles au carré de la norme de la fonction d'onde associée à l'électron.

Enfin, pour aller encore plus loin dans la description de l'atome, des corrections relativistes sont à apporter, notamment pour les atomes de numéro atomique élevé pour lesquels les vitesses des électrons sur les orbites sont importantes.