

IPhO 2024

Préparation toulousaine

Oscillateurs couplés

I. Rappel sur les oscillateurs classiques

oscillateur harmonique = pulsation propre ω_0

(Isochronisme)

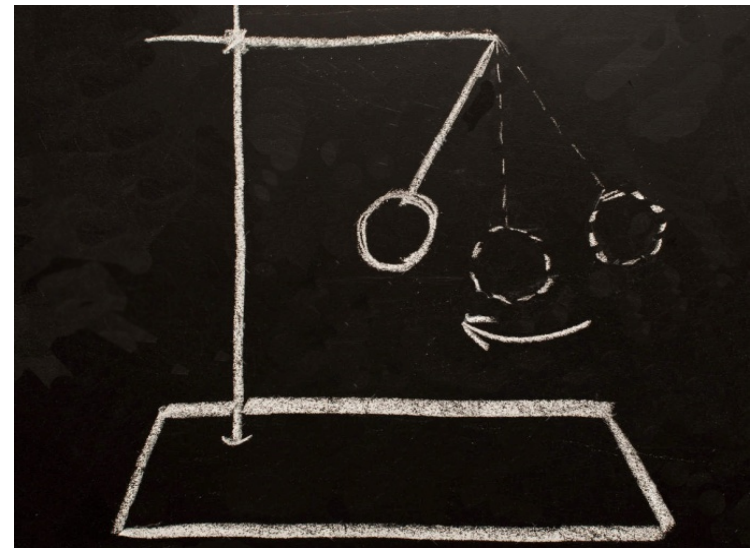
Pour le pendule pesant : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

indépendante de m

$T \approx 2 \text{ s}$ si $L = 1 \text{ m}$

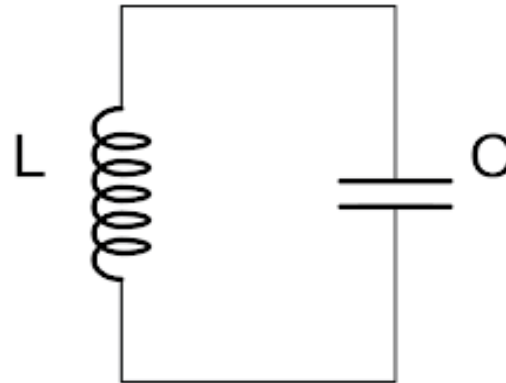
$T \approx 16 \text{ s}$ si $L = 76 \text{ m}$

(pendule du Panthéon)



B. Circuit LC

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

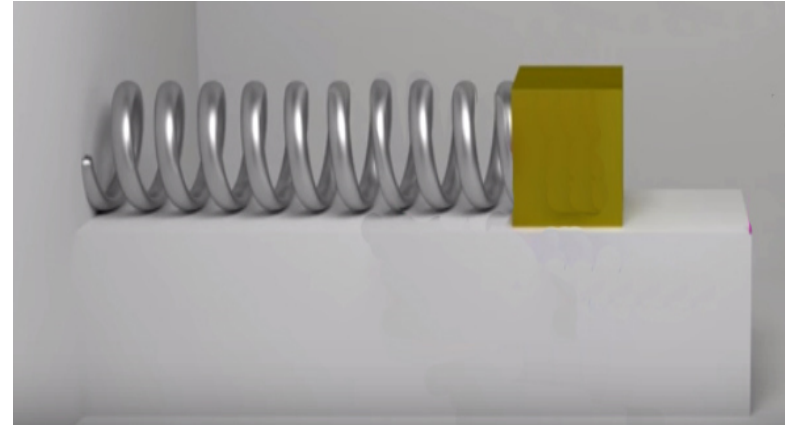


Associations de L ou de C :

	Bobines idéales	Condensateurs
Association série	$L_{\text{éqv}} = L_1 + L_2$	$C_{\text{éqv}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
Association parallèle (dérivation)	$L_{\text{éqv}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$	$C_{\text{éqv}} = C_1 + C_2$

C. Masse + ressort

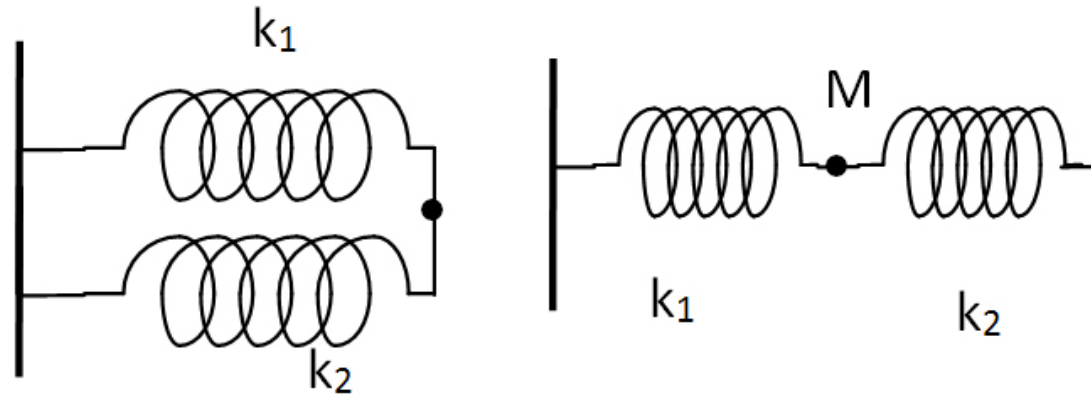
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



- k = raideur du ressort
- k faible = ressort souple = osc lentes.

C. Masse + ressort

Associations de ressorts en parallèle

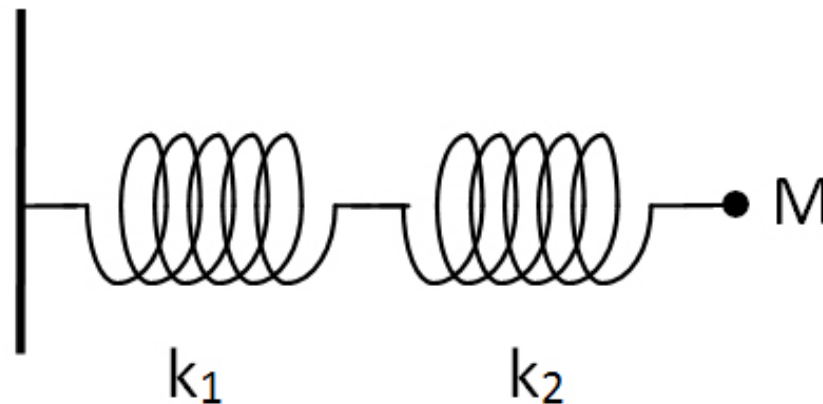


$$k_{\text{parallèle}} = k_1 + k_2$$

-> ressort plus dur

C. Masse + ressort

Associations de ressorts en série



$$k_{\text{série}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

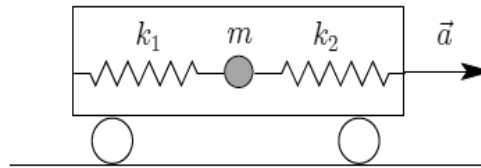
-> ressort plus souple

C. Masse + ressort

- un ressort coupé en deux : $2 k$
- 2 ressorts identiques bout à bout : $k/2$
- Expérience : 1 ressort $\rightarrow T = 0,798 \text{ s}$
2 ressorts $\rightarrow T' = 1,152 \text{ s}$
- A-t-on $T' = \sqrt{2} T = 1,41 T$?
- $T'/T = 1,44$
- Mais $u(T) = 0,008 \text{ s}$ et $u(T') = 0,008 \text{ s}$
- Écart normalisé = $z = \frac{|T' - \sqrt{2} T|}{\sqrt{u^2(\sqrt{2}T) + u^2(T')}} = 1,7$

QCM 2016 – question 1

1. On considère un mobile de masse m relié à deux ressorts idéaux de raideur k_1 et k_2 , et pouvant se déplacer horizontalement sans frottement dans un véhicule en mouvement uniformément accéléré par rapport au référentiel terrestre, a désignant la norme de son vecteur accélération.



Quelle formule vérifie la fréquence des oscillations du mobile ?

(a) $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

(c) $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m} + a}$

(b) $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$

(d) $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m} + a}$

- L'acc n'a d'influence que sur la position d'équilibre
- Association parallèle : $k = k_1 + k_2$
- Réponse a

A. Pendules couplés

Couplage de 2 oscillateurs :

→ **2 pulsations propres**

→ **2 modes propres**

A vous de trouver les 2 modes propres !

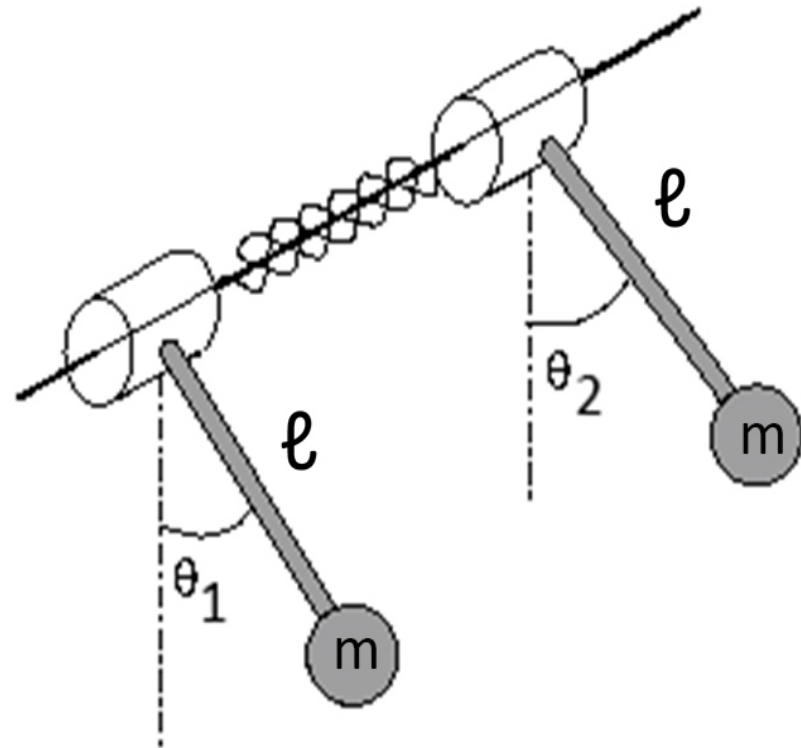
II Approche expérimentale

2 modes propres sinusoïdaux :

symétrique ($\theta_1 = \theta_2$)

antisymétrique

($\theta_1 = -\theta_2$)



II Approche expérimentale

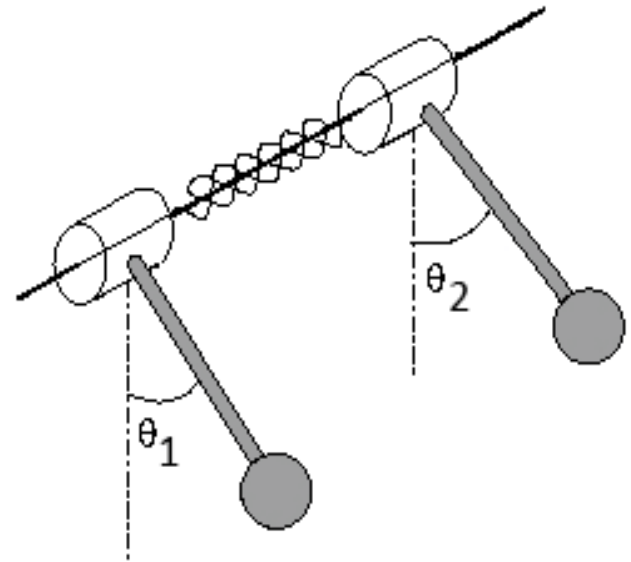
symétrique : $\omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$T_{1,\text{exp}} = 1,53 \text{ s}$ ($f_1 = 0,6536 \text{ Hz}$)

antisymétrique

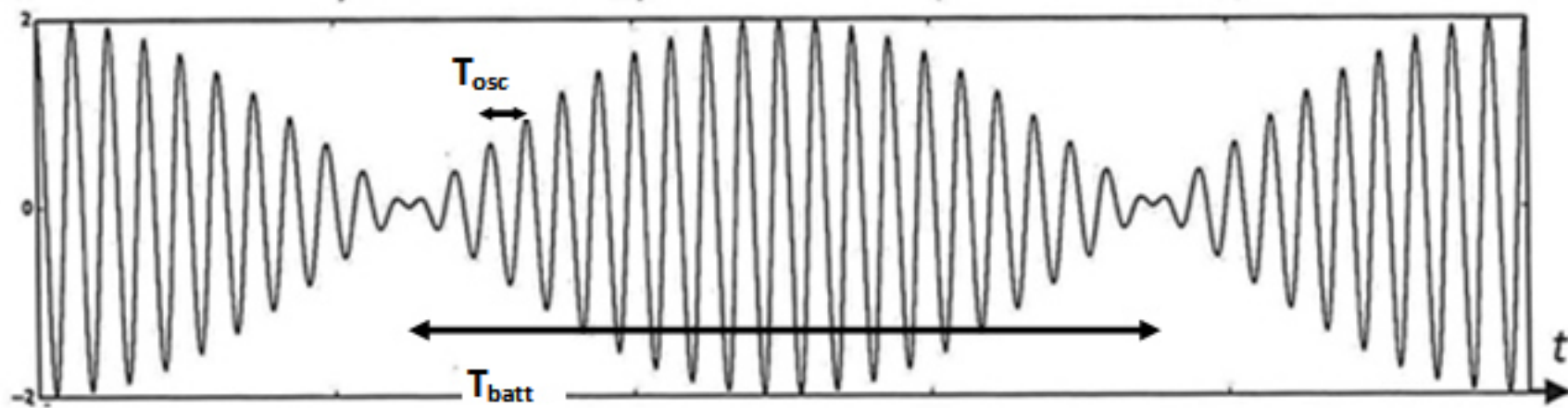
$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{mg\ell + 2C}{J}} \neq \omega_{01}$$

$T_{2,\text{exp}} = 1,38 \text{ s}$ ($f_2 = 0,7246 \text{ Hz}$)



A. Pendules couplés

Mouvement général : battements



$$f_{osc} = \frac{f_{01} + f_{02}}{2} \quad f_{batt} = |f_{01} - f_{02}|$$

A. Pendules couplés

Mouvement général : battements

$$f_{osc} = \frac{f_{01} + f_{02}}{2} \text{ et } f_{batt} = |f_{01} - f_{02}|$$

$$T_{osc,exp} = 1,54 \text{ s} \rightarrow f_{osc,exp} = 0,65 \text{ Hz}$$

$$\text{et } T_{bat,exp} = 13,5 \text{ s} \rightarrow f_{bat,exp} = 0,074 \text{ Hz}$$

Or :

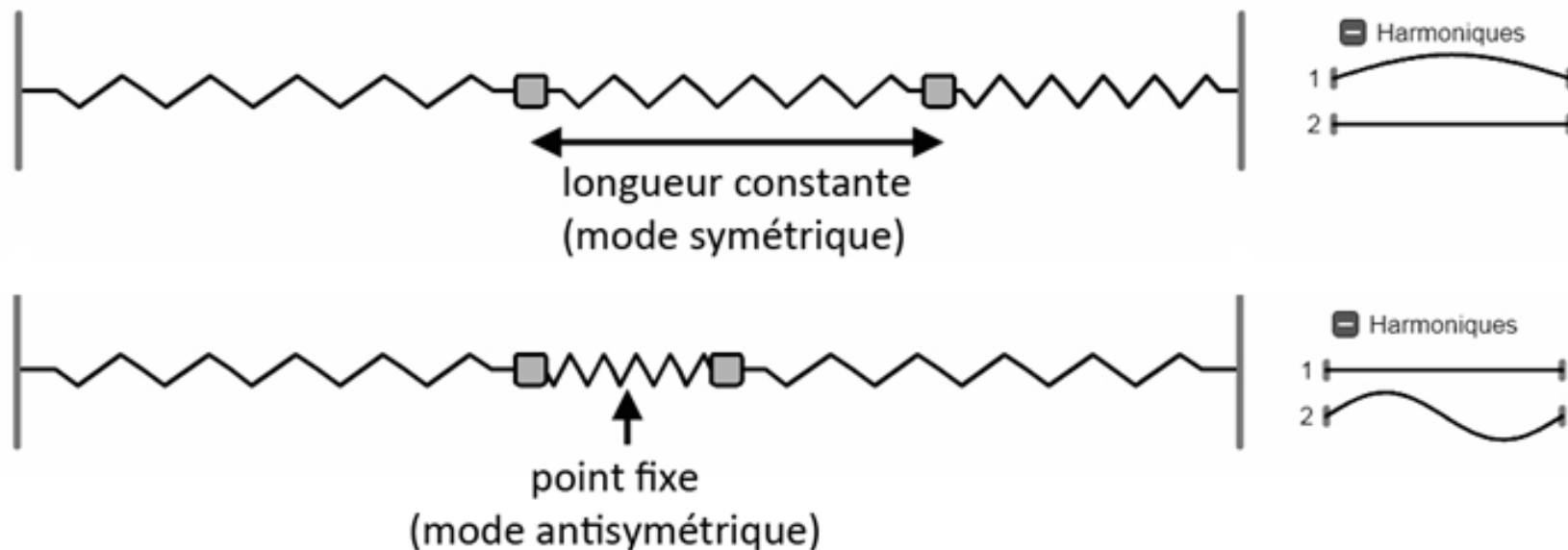
$$(f_1 + f_2)/2 = 0,69 \text{ Hz} \quad T_{osc} = 1,45 \text{ s}$$

$$f_2 - f_1 = 0,071 \text{ Hz} \quad T_{bat} = 14,1 \text{ s}$$

B. Simulations numériques

Colorado.edu

Recherche des modes propres...



B. Simulations numériques

Conclusion:

Couplage de 2 oscillateurs :

→ 2 pulsations propres Ω_{01} et Ω_{02}

→ 2 modes propres

Si oscillateurs identiques

→ symétrique et antisymétrique

Bonnes CI : un seul mode propre excité (osc h)

**CI quelconques : superposition des 2 modes propres
= battements.**

$$f_{osc} = \frac{f_{01} + f_{02}}{2} \quad f_{batt} = |f_{01} - f_{02}|$$

C. Efficacité du couplage

Plusieurs pendules couplés par un fil
Observation.

Efficacité du couplage

= amplitude des battements

Couplage efficace si ω_0 proches

C. Force du couplage

Ressort de torsion = couplage fort

Fil = couplage faible

Couplage fort : éloigne f_{02} et f_{01}

→ battements rapides ($f_{\text{bat}} = f_{02} - f_{01}$)

Un couplage lâche conduit à $f_{02} \approx f_{01}$

→ battements lents (f_{bat} très petite)

C. Paramètres du couplage

Site de l'université du Mans

$$x_2 = 0$$

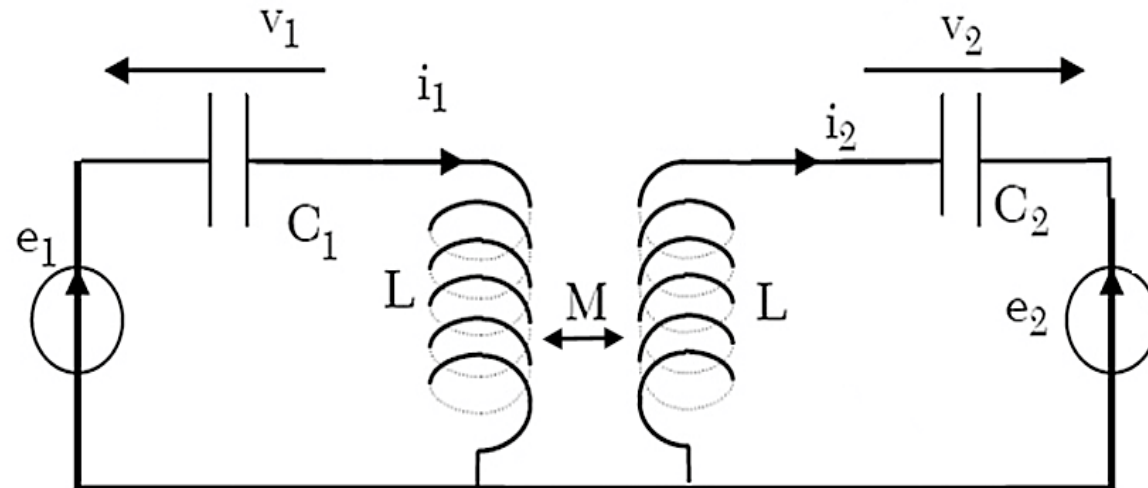
$k_2 = 0,1 \text{ N/m}$: battements lents

$k_2 = 1 \text{ N/m}$: battements rapides

$m_2/m_1 = 2$ ($k_2=0.1$) : mouvements de X_2 faibles
et X_1 non perturbé (courbes)

D. Circuits électriques

- $L = 40 \text{ mH}$
- $C = 50 \text{ nF}$
- $f_0 = 3,5 \text{ kHz}$

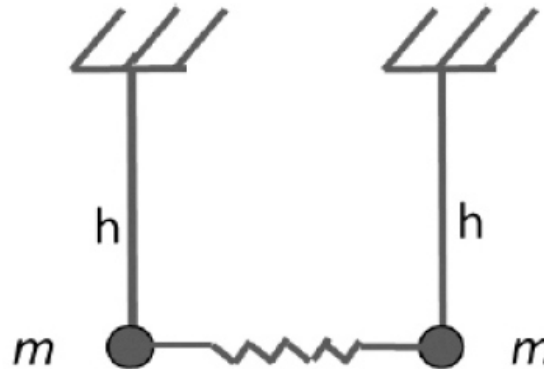


D. Circuits électriques

- 1 seul oscillateur
- Couplage fort
- Couplage faible
- Modes propres symétrique et antisymétrique
- Diminution de l'efficacité du couplage

1. Épreuve de sélection française 2017 (extrait du QCM)

Q16. Deux pendules de masse m et de longueur h sont attachés par un ressort de raideur K et de longueur à vide l_0 . La distance entre les deux masses est initialement de l_0 . Quelle est la seule expression possible, pour la fréquence du mode propre de plus haute fréquence ?



(a) $\sqrt{\frac{2g}{h} + \frac{2K}{m}}$

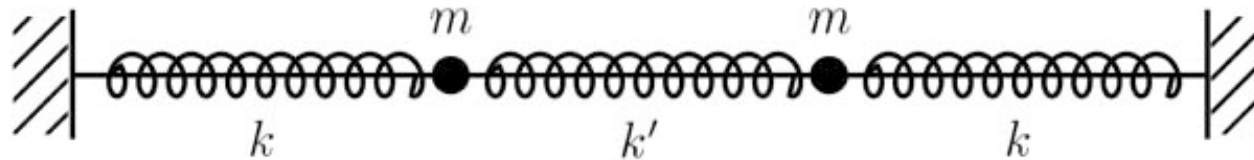
(c) $\sqrt{\frac{2K}{m}}$

☒ (b) $\sqrt{\frac{g}{h} + \frac{2K}{m}}$

(d) $\sqrt{\frac{K}{2m}}$

- Mode symétrique : ressort de longueur constante $\omega_s = \sqrt{g/h}$
- Mode antisym : coupons le ressort en 2 $\omega_a = \sqrt{g/h + 2K/m}$

$$k' \ll k.$$



Lorsqu'on observe des battements, que peut-on dire de leur fréquence ?

$$(a) \quad f \simeq \frac{1}{2\pi} \frac{k'}{k} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (b) \quad f \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{k'}{k} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$(c) \quad f \simeq \frac{1}{2\pi} \frac{k}{k'} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (d) \quad f \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{k}{k'} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ni c ni d car f_{bat} est faible si le couplage est faible
(donc en k'/k)

Possible sans calculs :

- mode symétrique :

Le ressort central ne bouge pas

$$\Omega_s = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- mode antisymétrique : le point central ne bouge pas.

$\Leftrightarrow$ m accrochée à k et à un demi ressort k'.

$\Leftrightarrow$ m accrochée à k // 2k' :

$$\Omega_d = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$$

Cohérent

On a donc :

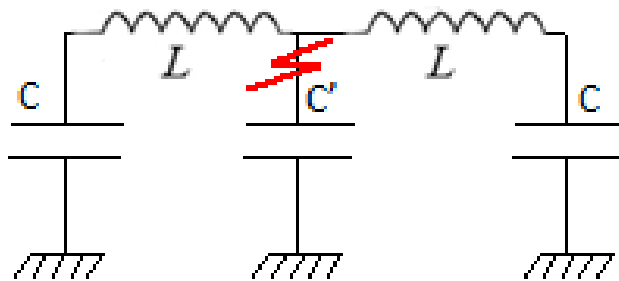
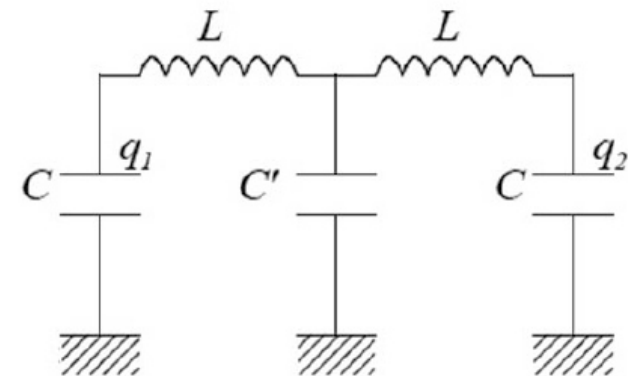
$$f_{bat} = \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} - \sqrt{\frac{k}{m}} \right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\sqrt{1 + \frac{2k'}{k}} - 1 \right)$$

Or $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ (cf. cours sur les développements limités) :

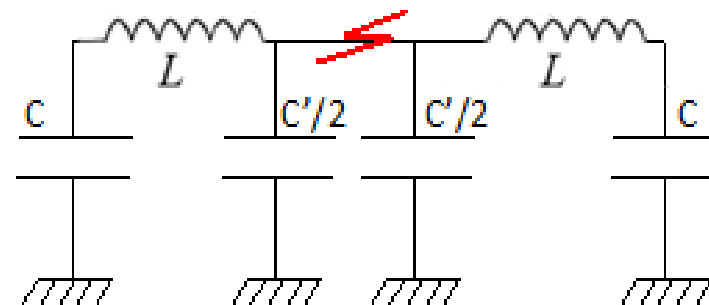
$$\begin{aligned} f_{bat} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\sqrt{1 + \frac{2k'}{k}} - 1 \right) \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{k'}{k} - 1 \right) \approx \frac{1}{2\pi} \frac{k'}{k} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

2. Modes propres

1. Déterminer, sans passer par la résolution d'un système d'équations couplées, les pulsations propres de ce circuit.
2. Comment obtenir expérimentalement l'excitation de chaque mode propre ?
3. Déterminer la fréquence des battements observés si les conditions initiales sont :
 $q_1(0) \neq 0$ et $q_2(0) = 0$.



$$\omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

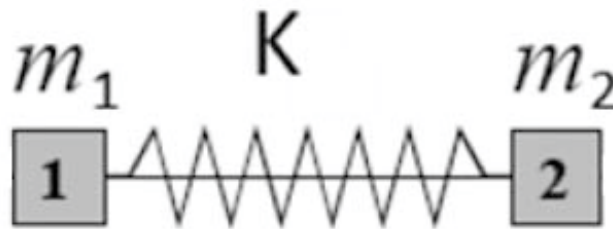


$$\omega_a = \sqrt{\frac{C + C'/2}{L(CC'/2)}} = \sqrt{\frac{2C + C'}{LCC'}}$$

F. Pulsation propre nulle

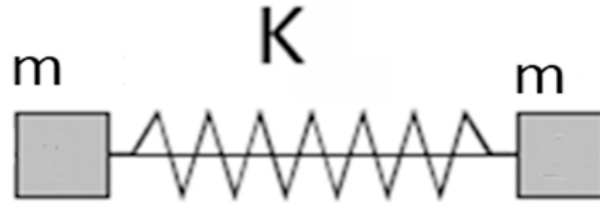
Programme IPhO évoque le cas des **pulsations propres nulles**.

C'est un cas très particulier : il faut $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$!



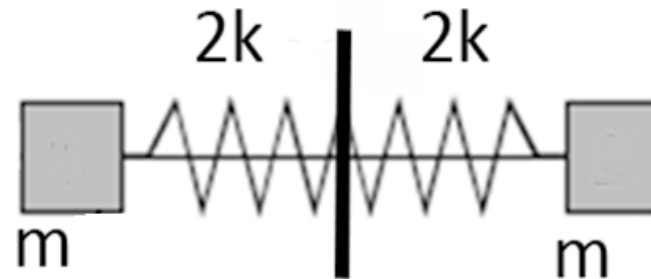
$\Omega_1 = 0$: mode propre n°1 = mvt d'ensemble à V constante.

Exemple :



- Mode symétrique : pulsation nulle
- Mode antisymétrique :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$



N OH IDENTIQUES COUPLÉS

Simulation numérique de Colorado.edu :

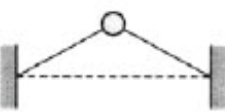
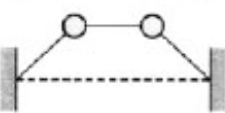
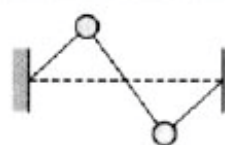
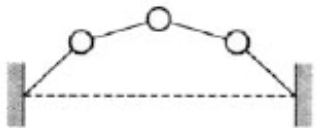
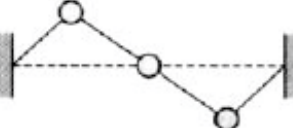
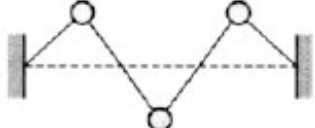
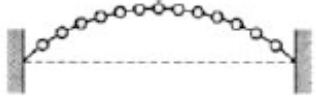
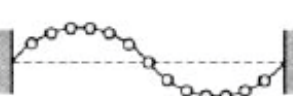
- augmenter le nombre de masses
- observation des différents modes propres.

Conclusion : couplage de **N OH**

- **N modes propres**
- **N pulsations propres Ω_n .**

Remarque : N modes propres par degré de liberté !

Voici un tableau avec la description des divers modes propres :

	mode 1	mode 2	mode 3	...	mode N
$N = 1$					
$N = 2$				...	
$N = 3$				...	
...	...	...	...	...	...
N				...	

$N \rightarrow \infty$: **corde** de Melde

modes propres ($\lambda_n = \frac{2L}{n}$ et $f_n = n \frac{c}{2L} = n f_1$) !

Décomposition en modes propres :

Cl quelconques = $\sum$ modes propres

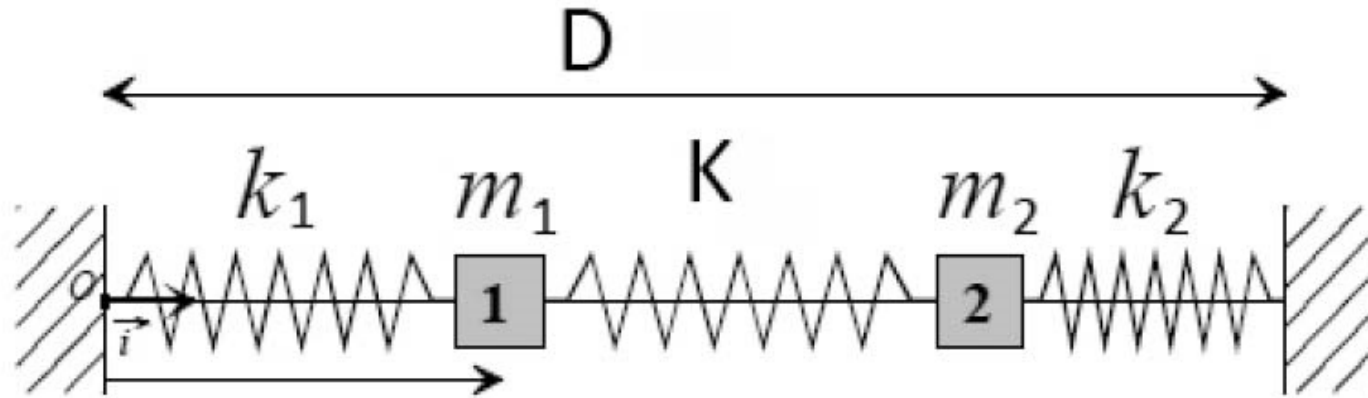
Chaque mode propre évolue à sa fréquence propre.

Simulation numérique de Colorado.edu :

- passage en 2D !

→ n^2 modes propres par degré de liberté !

IV. Mise en équation



Pas de frottements

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : $\{m_1\}$ puis $\{m_2\}$

Forces sur m_1 :

$$\vec{F}_1 = -k_1(x_1 - \ell_{01}) \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{c1} = -K(x_2 - x_1 - L_0)(-\vec{u}_x)$$

Forces sur m_2 :

$$\vec{F}_2 = -k_2(D - x_2 - \ell_{02})(-\vec{u}_x)$$

$$\vec{F}_{c2} = -K(x_2 - x_1 - L_0) \vec{u}_x$$

Supprimé !

2 OH couplés $\rightarrow$ 2 modes propres (Ω_1 et Ω_2)

Bonnes CI $\rightarrow$ 1 seul mode = osc harmoniques

CI quelconques $\rightarrow$ superposition des 2 modes propres.

D. BATTEMENTS

$$X_1(t) = \frac{A_s}{2} (\cos(\Omega_s t + \varphi_s) + \cos(\Omega_d t + \varphi_d))$$

Or $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos((a+b)/2) \times \cos((a-b)/2)$,

$$X_1(t) = A_s \cos\left(\frac{\Omega_s - \Omega_d}{2} t + \frac{\varphi_s - \varphi_d}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega_s + \Omega_d}{2} t + \frac{\varphi_s + \varphi_d}{2}\right)$$

$$X_1(t) = A_s \cos\left(\frac{\Omega_s - \Omega_d}{2}t + \frac{\varphi_s - \varphi_d}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega_s + \Omega_d}{2}t + \frac{\varphi_s + \varphi_d}{2}\right)$$

Battements :

oscillations à $\frac{\Omega_s + \Omega_d}{2} = \omega_{osc}$

amplitude = $\left| A_s \cos\left(\frac{\Omega_s - \Omega_d}{2}t + \frac{\varphi_s - \varphi_d}{2}\right) \right|$.

L'amplitude a une fréquence $f_{batt} = f_{bat} = \left| \frac{\Omega_s - \Omega_d}{2\pi} \right|$.

On retient :

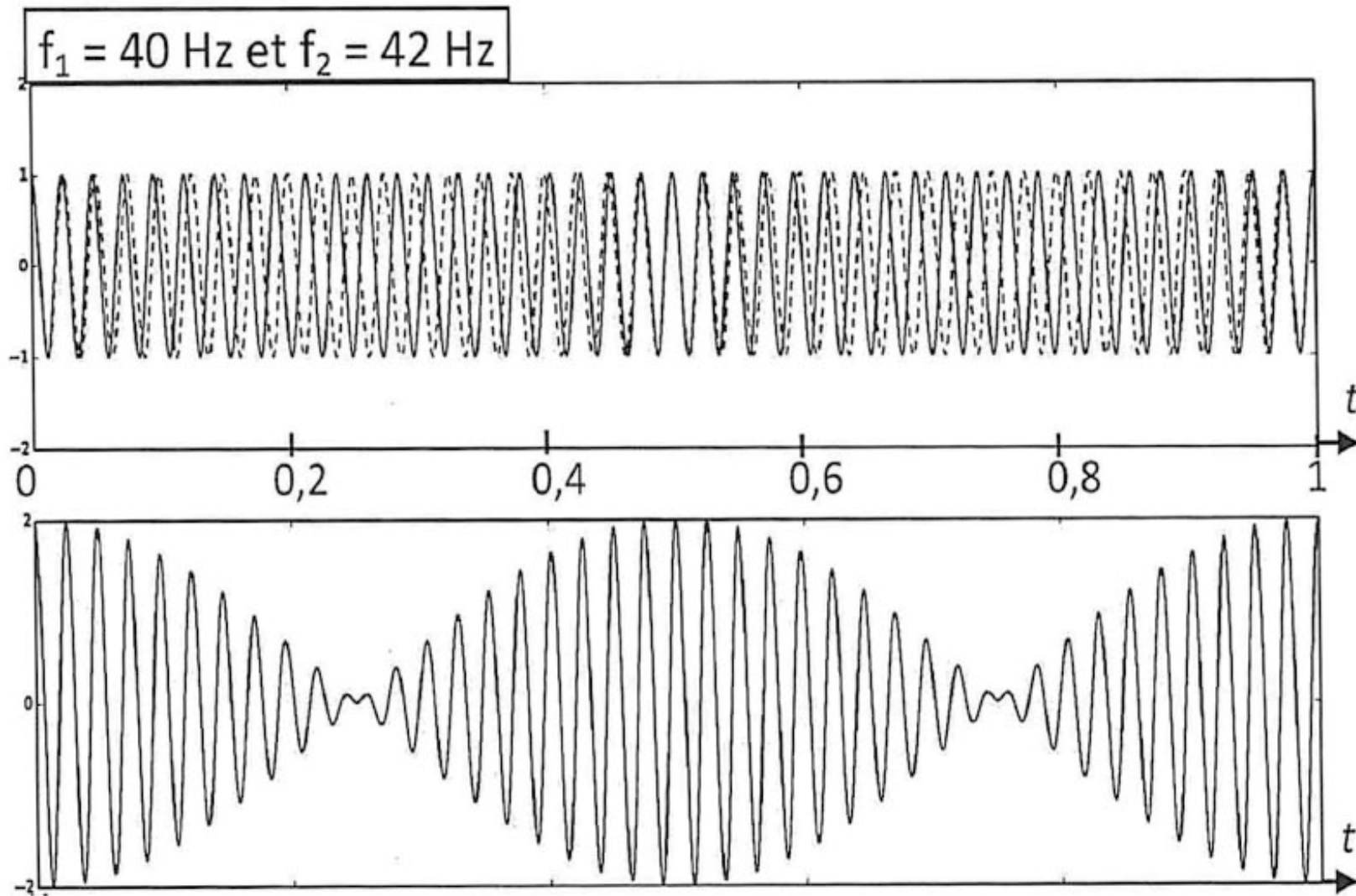
$$f_{osc} = \frac{f_{mode1} + f_{mode2}}{2}$$

$$f_{bat} = |f_{mode1} - f_{mode2}|$$

Battements très visibles si le couplage **lâche** :

$$K \ll k \quad \rightarrow \quad \Omega_s \approx \Omega_d \quad \omega_{\text{bat}} \ll \omega_{\text{osc}}$$

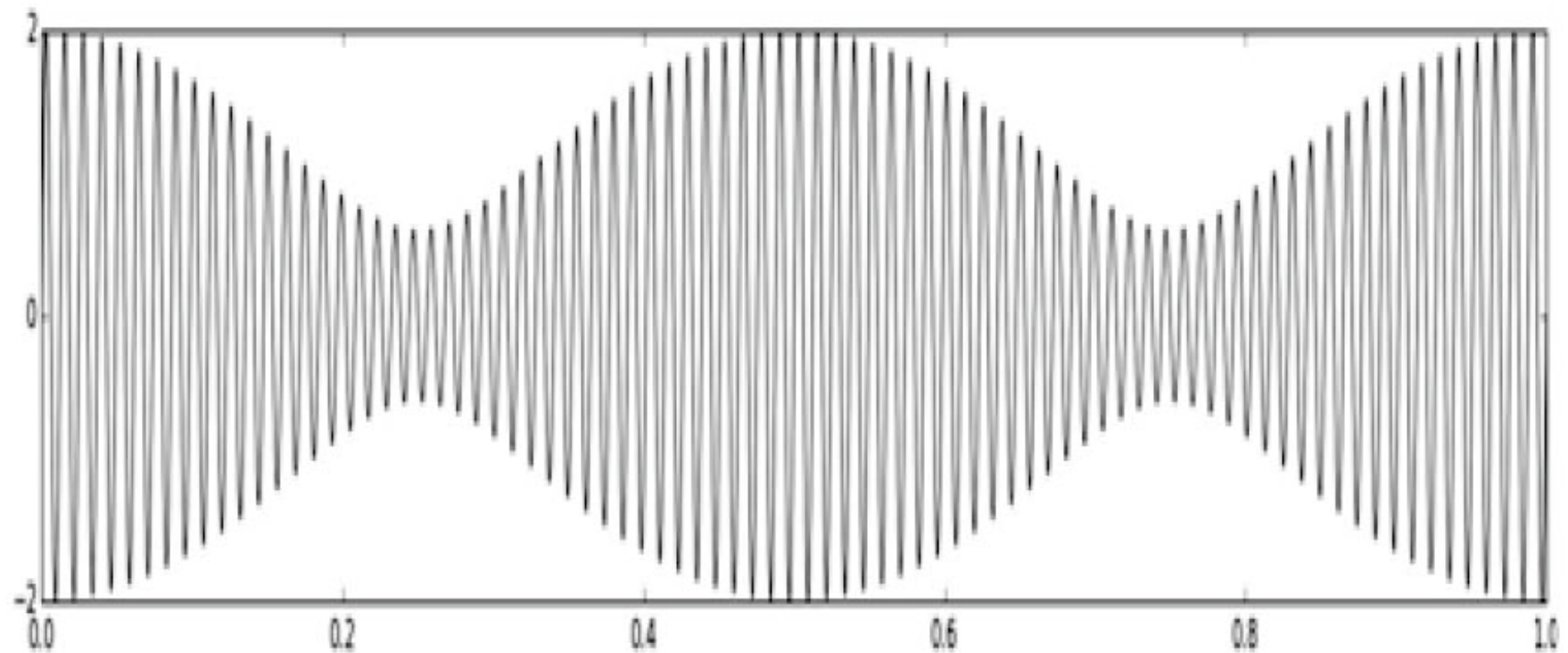
Battements lents / oscillations :



Remarque :

si $A_S \neq A_d \rightarrow$ Battements mais $\max = A_S + A_d$ et $\min = |A_S - A_d|$

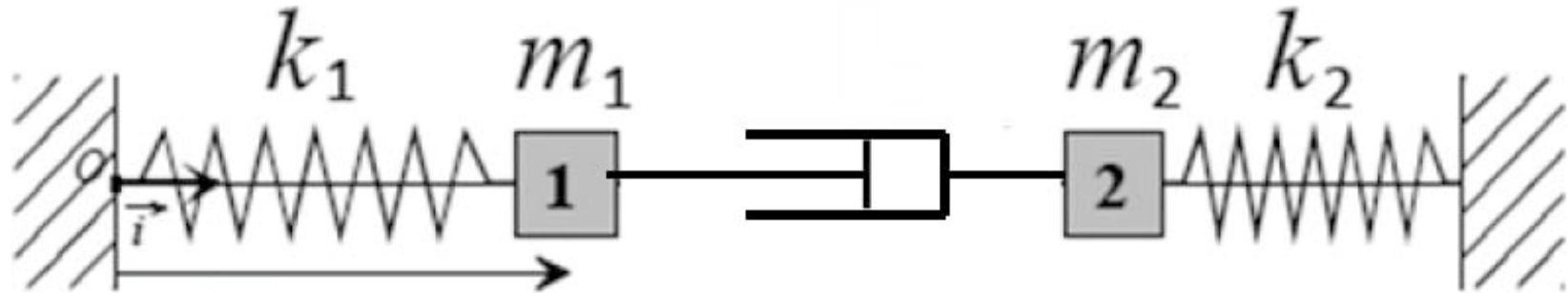
moins spectaculaire car pas de minimum nul.



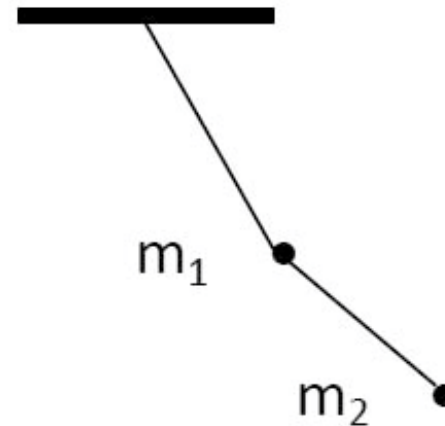
E. DIVERS EXEMPLES DE COUPLAGES

Couplage par élongation = exemple traité

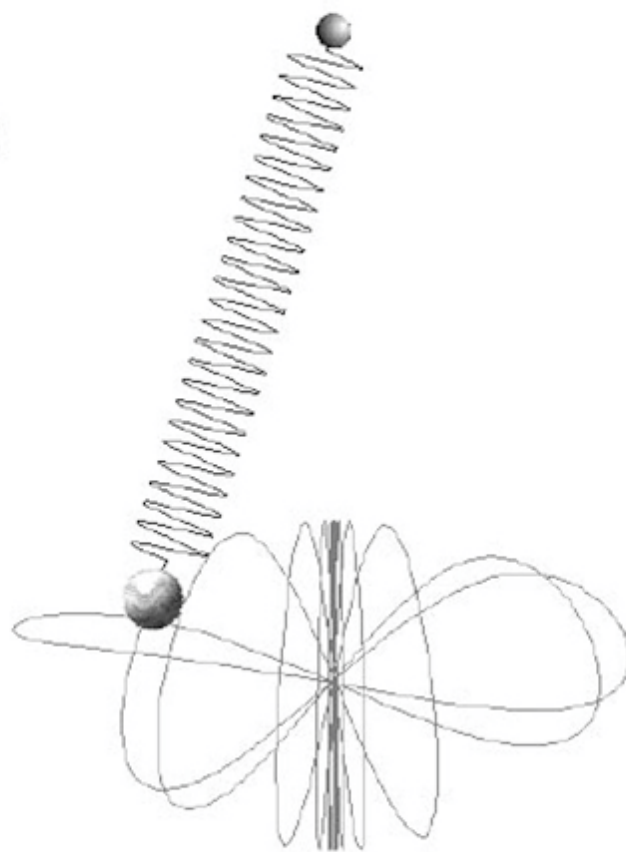
Couplage par amortissement :



Couplage par inertie :



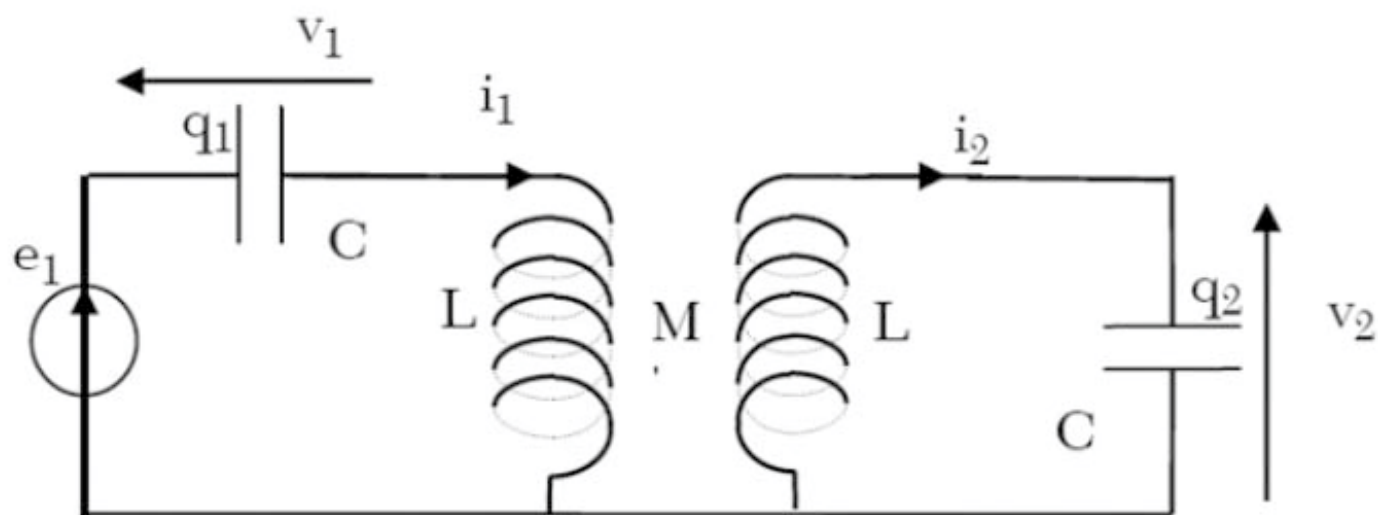
Expérience de la loi de Hooke :
expérience avec masse + ressort
Vu en TP en début d'année.
= couplage compliqué.



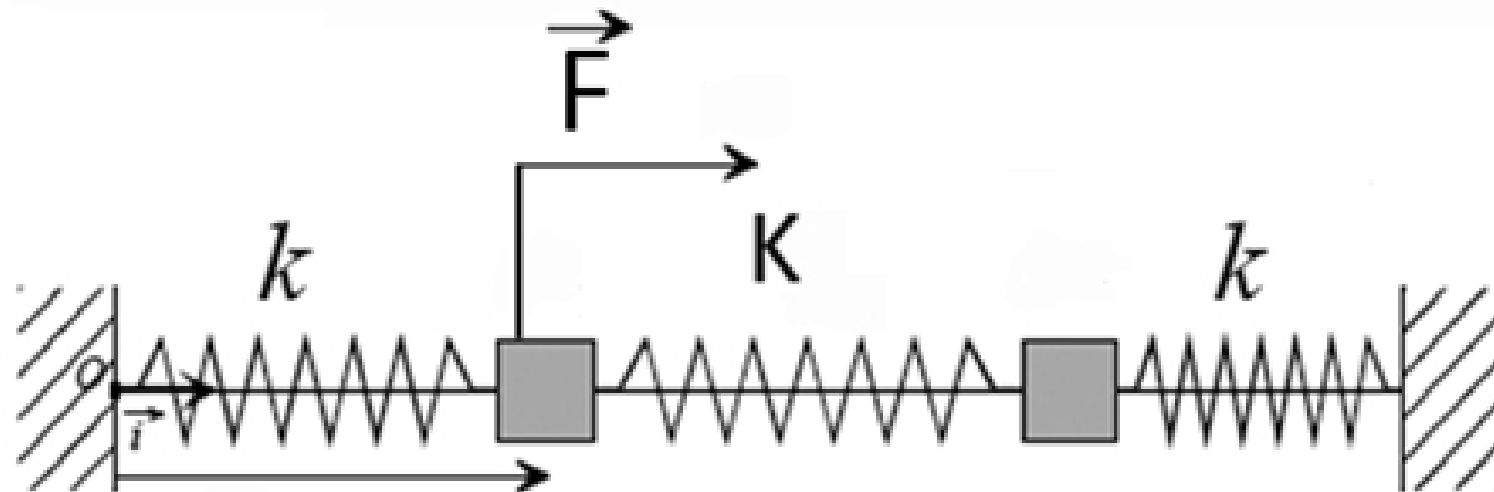
Et bien sûr toute l'électricité !

Circuits LC couplés par C ou R ou L.

Expl :



V. Régime forcé

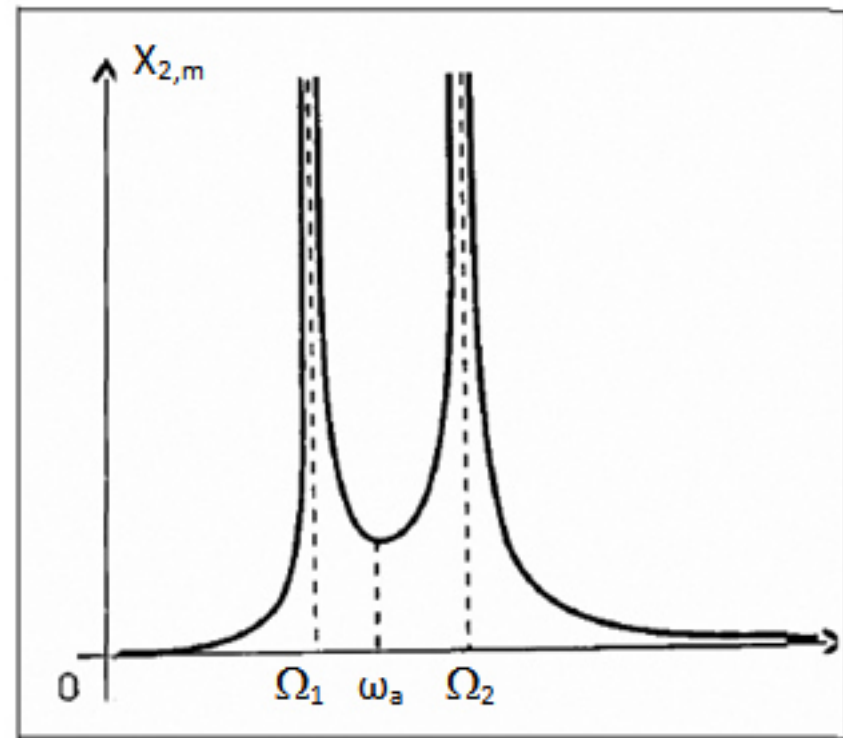
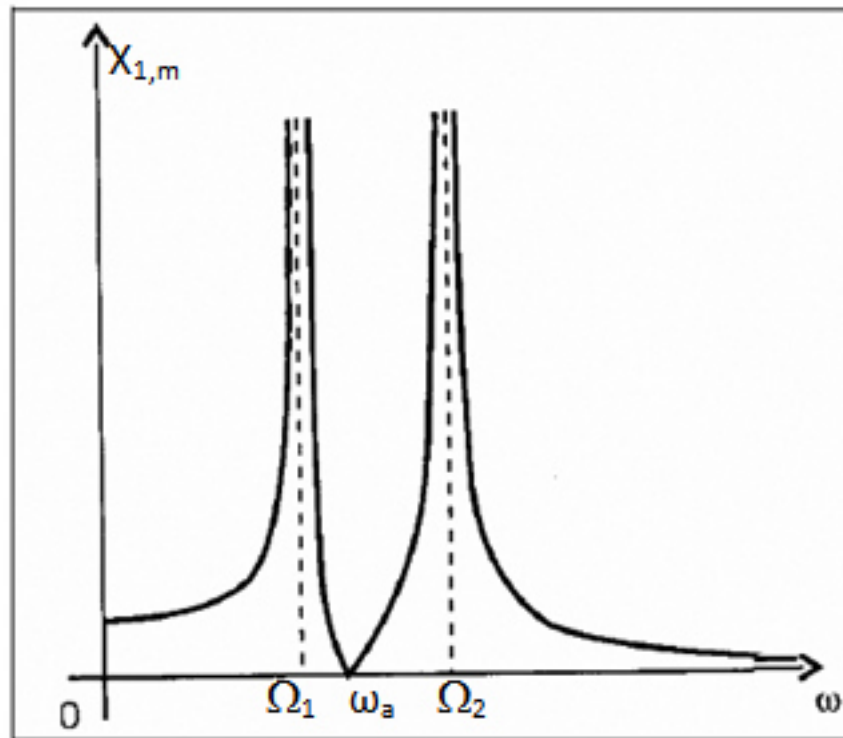


$$\vec{F} = F \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

$$m\ddot{X}_1 + k X_1 + K X_1 - K X_2 = F \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{X}_2 + k X_2 + K X_2 - K X_1 = 0$$

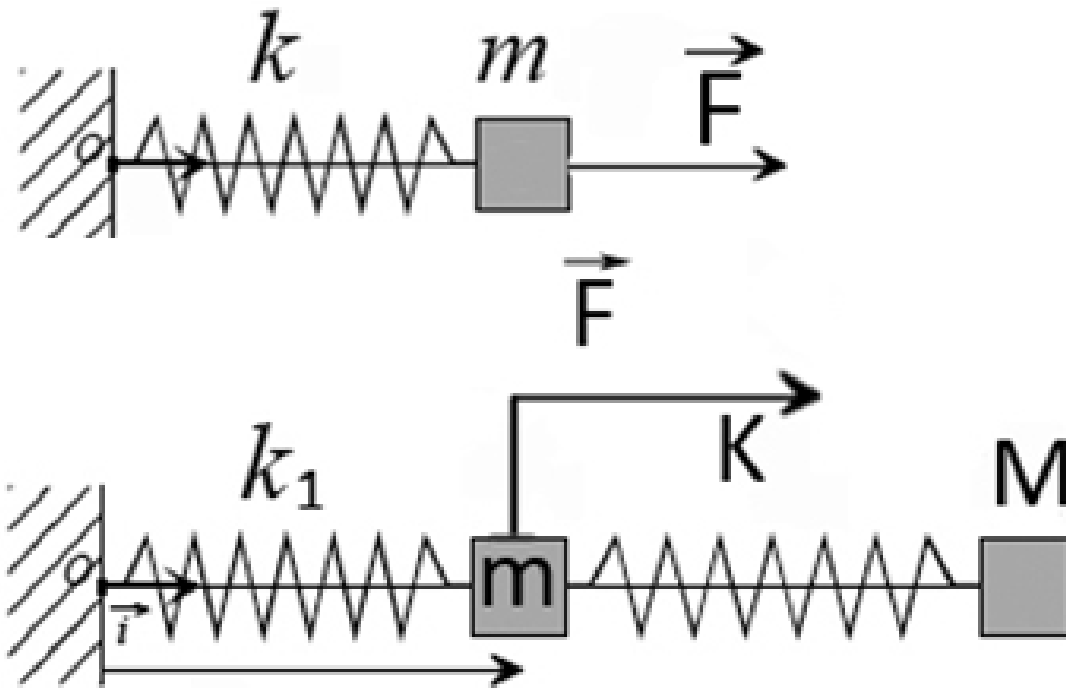
V. Régime forcé



2 résonances et ...

1 antirésonance (entre les 2 résonances)

B. Absorbeur de vibrations

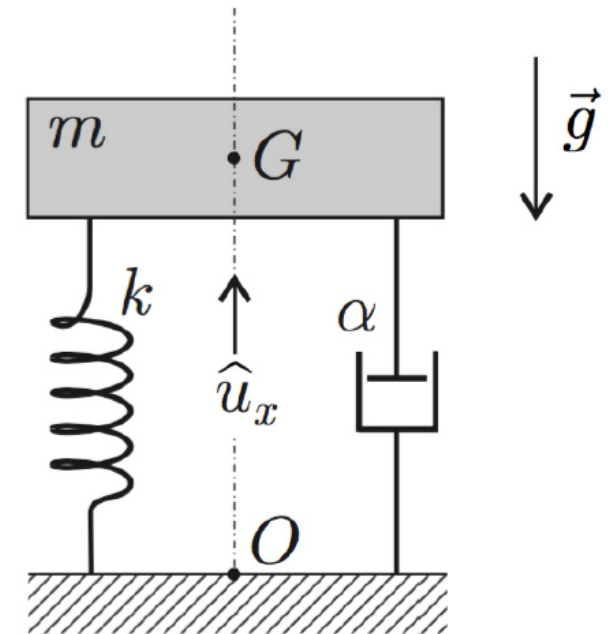


Si $K/M = \omega^2$ alors $\underline{x}_{1,m} = 0$

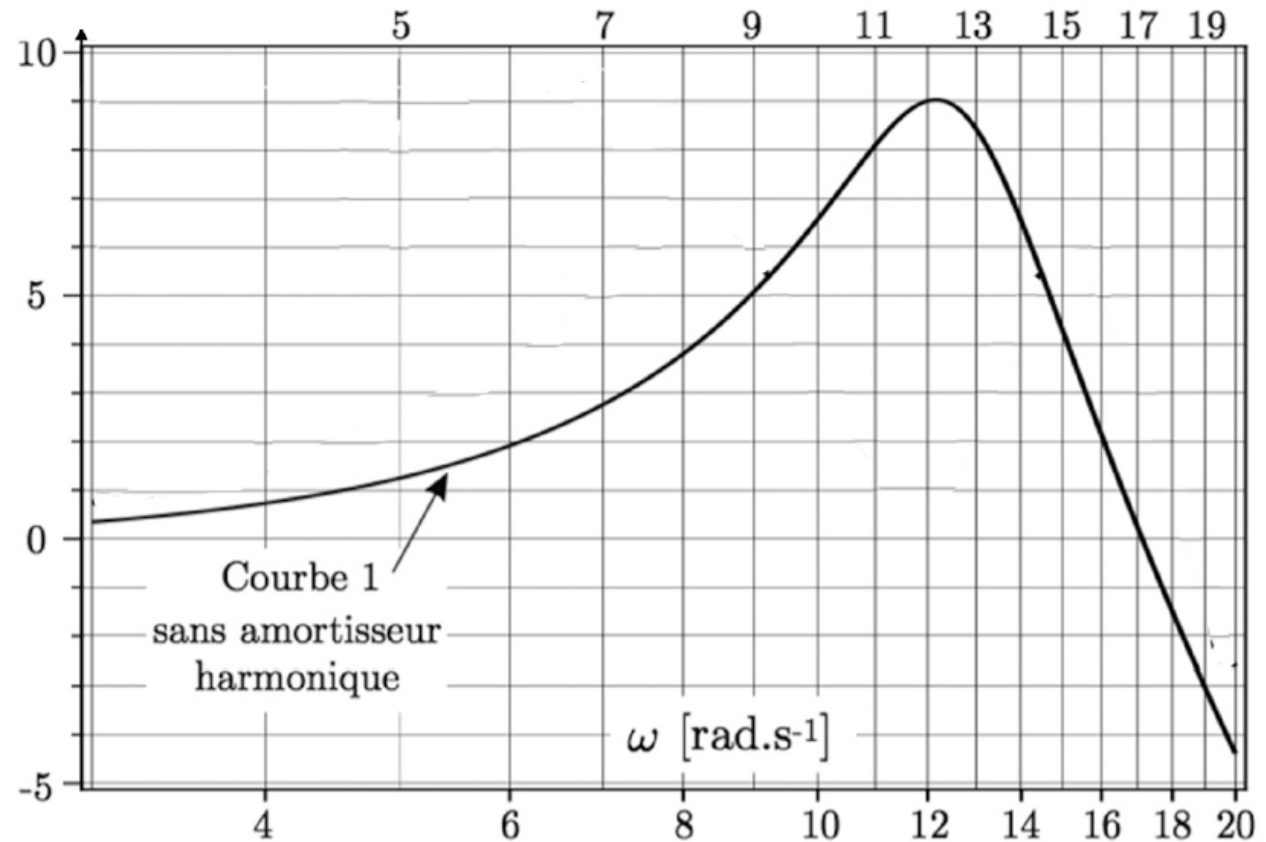
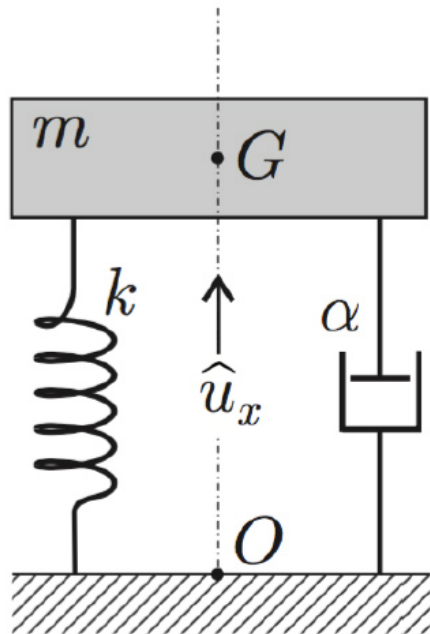
Étouffer les vibrations par couplage !

Mines PC et MP 2016

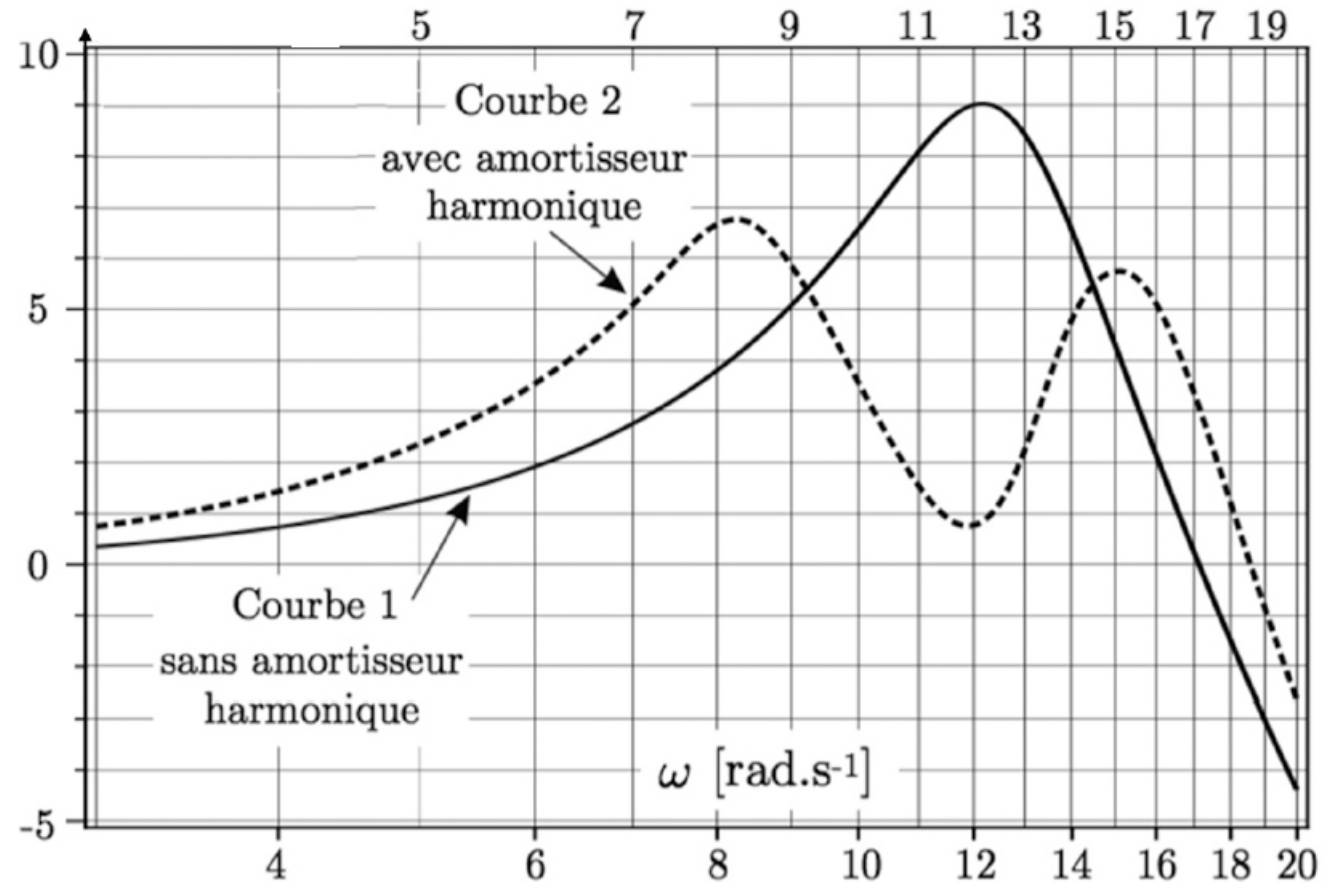
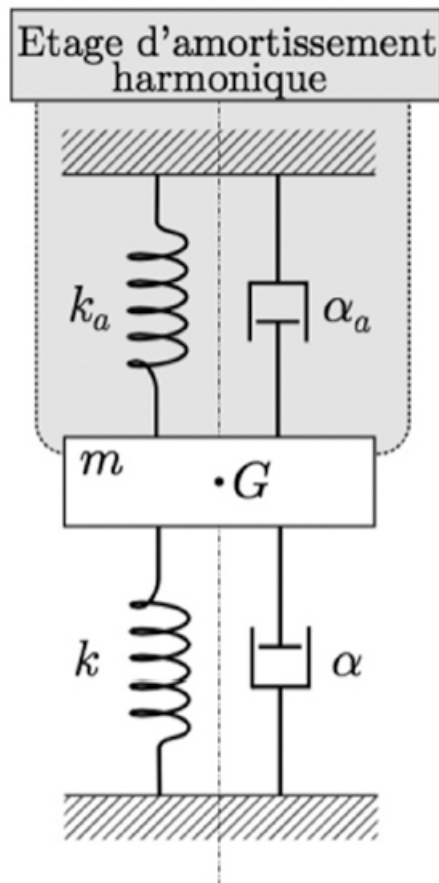
Millenium bridge à Londres



Mines PC et MP 2016



$\omega_{\text{res}} \approx 12 \text{ rad/s}$ donc $f_{\text{res}} \approx 2 \text{ Hz}$ et $T_{\text{res}} \approx 0,5 \text{ s} = \text{période de la marche !}$



Merci de votre attention

Bilan

2 oscillateurs couplés → 2 modes propres

mode symétrique et mode antisymétrique

Cl quelconques : battements ($f_{\text{bat}} = f_{02} - f_{01}$)

Efficacité du couplage : oscillateurs identiques

Force du couplage : écartement des f_{0i}

→ Couplage lâche = battements lents

Régime forcé : 2 résonances + 1 antirésonance