Exercices pour réviser le programme de mathématiques du lycée

1 Fonctions logarithme et exponentielle

1.1 Exercices

Exercice 1. Écrire les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$$\ln 4\ ;\ \ln 9\ ;\ \ln 12\ ;\ \ln\frac{1}{6}\ ;\ \ln\frac{1}{24}\ ;\ \ln 108\ ;\ \ln(\frac{54}{32})\ ;\ \ln\sqrt{2}\ ;\ \ln\sqrt{12}$$

Exercice 2. Écrire les nombres suivants en fonction de logarithmes de nombres premiers.
Rappel : un nombre premier est un entier supérieur ou égal 2 n'admettant pour diviseurs que 1 et lui-même.

$$\ln 63\ ;\ \ln(\frac{25}{48})\ ;\ \ln(\sqrt{\frac{37}{12}})\ ; \ln\frac{\sqrt{19}}{22}\ ; \ln(280)$$

Exercice 3. Donner l'ensemble de définition des équations suivantes et les résoudre :

1. $(E_1) : \ln x = 3$
2. $(E_2) : \ln(x+5) = \ln(2-x)$
3. $(E_3) : \ln(x^2) = \ln(x)$
4. $(E_4) : \ln(2x-9) + \ln(x-4) = \ln(x^2+36)$

Exercice 4. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^{5\ln x}\ ,\ B = e^{4\ln(2x)-\ln 16}\ , C = e^{3\ln(2x)} - e^{2\ln(3x)}\ ,\ D = e^{\ln 2-\frac{1}{2}\ln(128)}$$

1.2 Corrigés

Exercice 1. Rappels :
pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.
En particulier, puisque $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.
pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln\frac{x}{y} = \ln(x) - \ln(y)$.
En particulier, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.

$\ln 4 = \ln(2^2) = 2\ln 2$.
$\ln 9 = \ln(3^2) = 2\ln(3)$
$\ln 12 = \ln(3 \times 2^2) = \ln(3) + \ln(2^2) = \ln(3) + 2\ln(2)$.
$\ln\frac{1}{6} = -\ln(6) = -\ln(2\times 3) = -(\ln(2) + \ln(3)) = -\ln(2) - \ln(3)$

$\ln \frac{1}{24} = -\ln 24 = -\ln(3 \times 2^3) = -\ln 3 - \ln(2^3) = -\ln 3 - 3\ln 2$
$\ln 108 = \ln(2 \times 54) = \ln(2 \times 6 \times 9) = \ln(2^2 \times 3^3) = 2\ln 2 + 3\ln 3$
$\ln(\frac{54}{32}) = \ln \frac{2\times 27}{2\times 16} = \ln \frac{3^3}{2^4} = 3\ln 3 - 4\ln 2$
$\ln \sqrt{2} = \ln(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln 2$
$\ln \sqrt{12} = \frac{1}{2}\ln 12 = \frac{1}{2}(\ln(3) + 2\ln(2)) = \frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2.$

Exercice 2. $\ln 63 = \ \ln(7 \times 3^2) = \ln 7 + 2\ln 3.$
$\ln(\frac{25}{48}) = \ln \frac{5^2}{6\times 8} = \ln 5^2 - \ln(3 \times 2^4) = 2\ln 5 - \ln 3 - 4\ln 2$
$\ln(\sqrt{\frac{37}{12}}) = \ln 37 - \ln 12 = \ln 37 - \ln(3 \times 2^2) = \ln 37 - \ln 3 - 2\ln 2$
$\ln \frac{\sqrt{19}}{22} = \frac{1}{2}\ln 19 - \ln 22 = \frac{1}{2}\ln 19 - \ln(2 \times 11) = \frac{1}{2}\ln 19 - \ln 2 - \ln 11$
$\ln(280) = \ln(4 \times 7 \times 10) = \ln(2^3 \times 5 \times 7) = 3\ln 2 + \ln 5 + \ln 7$

Exercice 3.

1. $(E_1) : \ln x = 3$
   (E_1) est définie pour $x > 0$ car la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ($=]0, +\infty[$).
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x = 3 \iff x = e^3$.
   On vérifie que e^3 appartient à $\mathbb{R}_+^*$.
   Donc l'ensemble des solutions est $\{e^3\}$.
2. $(E_2) : \ln(x+5) = \ln(2-x)$
   (E_2) est définie pour $x \in \mathbb{R}$ vérifiant :
   $$\begin{cases} x+5 > 0 \text{ (pour que } \ln(x+5) \text{ existe)} \\ 2-x > 0 \text{ (pour que } \ln(2-x) \text{ existe)} \end{cases}$$
   Or
   $$\begin{cases} x+5 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \iff -5 < x < 2$$
   Ainsi, l'ensemble de définition de (E_2) est $]-5, 2[$. On résout (E_2) sur $]-5, 2[$:
   $$(E_2) \iff x+5 = 2-x \iff 2x = -3 \iff x = -\frac{3}{2}$$
   On vérifie que $-\frac{3}{2} \in]-5, 2[$.
   Donc l'ensemble des solutions de (E_2) est $\{-\frac{3}{2}\}$.
3. $(E_3) : \ln(x^2) = \ln(x)$
   (E_3) est définie pour $x \in \mathbb{R}$ vérifiant :
   $$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$$
   Or
   $$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \iff x > 0$$
   Donc l'ensemble de définition de (E_3) est $\mathbb{R}_+^*$.. On résout (E_3) sur $\mathbb{R}_+^*$:
   $$(E_3) \iff x^2 = x \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$
   Or $0 \notin \mathbb{R}_+^*$ (donc 0 n'est pas solution de (E_3) !), et $1 \in \mathbb{R}_+^*$.
   On en déduit l'ensemble des solutions de (E_3) : $\{1\}$.

4. $(E_4) : \ln(2x-9) + \ln(x-4) = \ln(x^2+36)$
   (E_4) est définie pour $x \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} 2x-9>0 \\ x-4>0 \\ x^2+36>0 \text{ (toujours vrai car } x^2 \geqslant 0) \end{cases}$$

   Or

$$\begin{cases} 2x-9>0 \\ x-4>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{9}{2} \\ x > 4 \end{cases} \iff x > \frac{9}{2}$$

   Donc l'ensemble de définition de (E_4) est $]\frac{9}{2}, +\infty[$. On résout (E_4) sur $]\frac{9}{2}, +\infty[$:

$$\begin{aligned} (E_4) &\iff \ln[\underbrace{(2x-9)(x-4)}_{2x^2-17x+36}] = \ln(x^2+36) \\ &\iff 2x^2-17x+36 = x^2+36 \\ &\iff x^2-17x = 0 \\ &\iff x(x-17) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 17 \\ &\iff x = 17 \text{ (car } 17 \in]\tfrac{9}{2}, +\infty[\text{ mais } 0 \notin]\tfrac{9}{2}, +\infty[) \end{aligned}$$

   Donc l'ensemble des solutions de (E_4) est $\{17\}$.

Exercice 4.

Rappels :
pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$.
pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x.e^y$ et $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$,
en particulier $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$.
pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = [e^x]^n$.

$A = e^{5\ln x} = e^{\ln(x^5)} = x^5$.

$B = e^{4\ln(2x)-\ln 16} = e^{\ln[(2x)^4]-\ln(16)} = e^{\ln\frac{(2x)^4}{16}} = \frac{(2x)^4}{16} = \frac{2^4x^4}{16} = x^4$ car $2^4 = 16$.

$C = e^{3\ln(2x)} - e^{2\ln(3x)} = e^{\ln[(2x)^3]} - e^{\ln[(3x)^2]} = (2x)^3 - (3x)^2 = 8x^3 - 9x^2 = x^2(8x-9)$.

$D = e^{\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(128)} = \dfrac{e^{\ln 2}}{e^{\frac{1}{2}\ln(128)}} = \dfrac{2}{\sqrt{128}} = \dfrac{2}{\sqrt{2\times 8^2}} = \dfrac{2}{8\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

2 Limites

2.1 Exercices

Exercice 5. Calculer, quand c'est possible, les limites des expressions suivantes aux voisinages indiqués :

1. $2x^3 - 5x^2 + 8$ en $+\infty$
2. $3x^2 + 5x + 1$ en $-\infty$
3. $x^2 + \ln x$ en $+\infty$
4. $\ln(x) - \dfrac{1}{x}$ en 0
5. $2x^2 - 3x - 5 + \ln x$ en $+\infty$
6. $x - \sqrt{x}$ en $+\infty$
7. $3x + e^{-x}$ en $+\infty$
8. $\dfrac{x}{\ln x}$ en 0.

Exercice 6. Calculer, quand c'est possible, les limites des expressions suivantes aux voisinages indiqués :

1. $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{5x + 2}$ en $+\infty$
2. $\dfrac{2x^3 - 8x + 1}{3x^3 + 250}$ en $+\infty$
3. $\dfrac{4x^2 + 1}{3x + 5}$ en $-\infty$
4. $\dfrac{4x^2 + 1}{3x^5 + 1}$ en $-\infty$
5. $\dfrac{2x^3 + 3x^2}{5x^6 + 2x}$ en 0.
6. $\dfrac{1}{x^3}$ en 0.

Exercice 7. Calculer, quand c'est possible, les limites des expressions suivantes aux voisinages indiqués :

1. $e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$
2. $\ln(x^2 + 1)$ en $+\infty$
3. $\ln \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ en $+\infty$
4. e^{2x^3+1} en $-\infty$
5. $e^{-\frac{1}{x^2}}$ en 0
6. $e^{\frac{1}{x}}$ en 0

2.2 Corrigés

Exercice 5.

1. $2x^3 - 5x^2 + 8$ en $+\infty$
Il s'agit de la limite d'un polynôme en $+\infty$. C'est donc la limite de son terme de plus haut degré (qui est $2x^3$).
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 - 5x^2 + 8 = +\infty$
2. $3x^2 + 5x + 1$ en $-\infty$
De même, il s'agit de la limite d'un polynôme en $-\infty$. C'est donc la limite de son terme de plus haut degré (qui est $3x^2$).
$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 + 5x + 1 = +\infty$
3. $x^2 + \ln x$ en $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \ln x = +\infty$.
4. $\ln x - \dfrac{1}{x}$ en 0
$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ dnc par somme des limites, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) - \dfrac{1}{x} = -\infty$.
Remarque : l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln x - \dfrac{1}{x}$ est $]0, +\infty[$. Donc quand on calcule la limite en 0, on ne précise pas que l'on se place à droite de 0 (car l'ensemble de définition l'iimpose).
Par contre, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. La limite que l'on prend en compte pour faire la somme des limite est la "limite à droite" en 0, notée $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x}$.
5. $2x^2 - 3x - 5 + \ln x$ en $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 3x - 5 = +\infty$ (c'est un polynôme donc sa limite en $+\infty$ est la limite du terme de plus haut degré).
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
Donc par somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 3x - 5 + \ln x = +\infty$
6. $x - \sqrt{x}$ en $+\infty$
Nous sommes en présence d'une forme indéterminée. Nous allons transformer l'expression afin d'untiliser les résultats usuels d'opérations sur les limites :
Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $x - \sqrt{x} = x(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{x}) = x(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}})$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (par quotient des limites, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}) = +\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \sqrt{x} = +\infty$.
7. $3x + e^{-x}$ en $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc par somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x + e^{-x} = +\infty$

8. $\dfrac{x}{\ln x}$ en 0.
$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln x} = 0$.

Exercice 6. Il s'agit de limites de fractions rationnelles (une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes) en + ou $-\infty$. La méthode est toujours la même : la limite est la limite du quotient des termes de plus haut degré de chaque polynôme.
Attention : ceci n'est valable que pour des calculs de limites en $+\infty$ ou $-\infty$ de fractions rationnelles !

1. $\dfrac{2x^2-3x+1}{5x+2}$ en $+\infty$:

   On calcule la limite en $+\infty$ de $\dfrac{2x^2}{5x}$:
   $\dfrac{2x^2}{5x} = \dfrac{2}{5}x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{5}x = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{5x+2} = +\infty$.
2. $\dfrac{2x^3-8x+1}{3x^3+250}$ en $+\infty$
   On calcule la limite en $+\infty$ de $\dfrac{2x^3}{3x^3}$. Or $\dfrac{2x^3}{3x^3} = \dfrac{2}{3}$.
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{3x^3} = \dfrac{2}{3}$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-8x+1}{3x^3+250} = \dfrac{2}{3}$.
3. $\dfrac{4x^2+1}{3x+5}$ en $-\infty$
   On calcule la limite en $-\infty$ de $\dfrac{4x^2}{3x}$.
   $\dfrac{4x^2}{3x} = \dfrac{4x}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2}{3x} = -\infty$.
   Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+1}{3x+5} = -\infty$.
4. $\dfrac{4x^2+1}{3x^5+1}$ en $-\infty$
   On calcule la limite en $-\infty$ de $\dfrac{4x^2}{3x^5}$.
   $\dfrac{4x^2}{3x^5} = \dfrac{4}{3x^3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{3x^3} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+1}{3x^5+1} = 0$.
5. $\dfrac{2x^3+3x^2}{5x^6+2x}$ en 0.
   Pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de cette fraction rationnelle,
   $\dfrac{2x^3+3x^2}{5x^6+2x} = \dfrac{x^2(2x+3)}{x(5x^5+2)} = \dfrac{x(2x+3)}{5x^5+2}$.
   Or $\lim\limits_{x\to 0} x(2x+3) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} 5x^5+2 = 2$.
   Donc par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(2x+3)}{5x^5+2} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3+3x^2}{5x^6+2x} = 0$.

6. $\dfrac{1}{x^3}$ en 0.
Nous allons calculer les limites à droite et à gauche en 0 :
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} x^3 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$.
Puisque les limites à droite et à gauche en 0 sont différentes, on en déduit que l'expression n'a pas de limite en 0.

Exercice 7.
Nous allons utiliser le théorème de composition des limites que nous rappelons :

$$Si \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \end{array} \right. \text{, alors } \lim_{x\to a} f(g(x)) = \ell$$

1. $e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} e^y = 1 \end{array} \right. \quad \text{Donc par composition des limites, } \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

2. $\ln(x^2+1)$ en $+\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2+1 = +\infty \\ \lim\limits_{y\to +\infty} \ln y = +\infty \end{array} \right. \quad \text{Donc par composition des limites, } \lim_{x\to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty.$$

3. $\ln \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$ en $+\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3+1} = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \ln y = -\infty \end{array} \right. \quad \text{Donc par composition des limites, } \lim_{x\to +\infty} \ln \frac{x^2+1}{x^3+1} = -\infty.$$

4. e^{2x^3+1} en $-\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} 2x^3+1 = -\infty \\ \lim\limits_{y\to -\infty} e^y = 0 \end{array} \right. \quad \text{Donc par composition des limites, } \lim_{x\to -\infty} e^{2x^3+1} = 0$$

5. $e^{-\frac{1}{x^2}}$ en 0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{y\to +\infty} e^{-y} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Donc par composition des limites, } \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

6. $e^{\frac{1}{x}}$ en 0

Nous allons prouver que cette expression n'a pas de limite en 0 en calculant la limite à droite et la limite à gauche :
<u>Limite à droite en 0 :</u>

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty \end{cases}$ Donc par composition des limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

Limite à gauche en 0 :

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0 \end{cases}$ Donc par composition des limites, $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

Les limites à droite et à gauche en 0 étant différentes, on en déduit que l'expression n'a pas de limite en 0.

3 Dérivation d'une fonction

3.1 Exercices

Exercice 8. Sans préciser l'ensemble de dérivation, dériver les fonctions suivantes

1. $f(x) = \sqrt{9x-1}$
2. $h(x) = \mathbf{e}^{4-3x}$
3. $p(x) = \dfrac{3}{x+2}$
4. $q(x) = \dfrac{3x+3}{5x-1}$

Exercice 9. Déterminer l'équation de la tangente au point a puis la position de la courbe par rapport à la tangente pour chacune des situations suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ et $a = 0$.
2. $g(x) = 4\mathbf{e}^{3x-6} + 2x$ et $a = 2$.

Exercice 10. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur $]1; +\infty[$.

1. $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 1$
2. $g(x) = 7\mathbf{e}^{7x-4} + \dfrac{1}{x}$
3. $h(x) = \dfrac{10}{x-1}$

3.2 Corrigés

Exercice 8.

1. Si $f = \sqrt{u}$ alors $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

   Ici, La fonction f est de la forme $\sqrt{u}$ avec pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{9}, +\infty\right[$, $u(x) = 9x - 3$.

   Donc, pour tout $x \in \left]\dfrac{1}{9}, +\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{9}{2\sqrt{9x-1}}$.

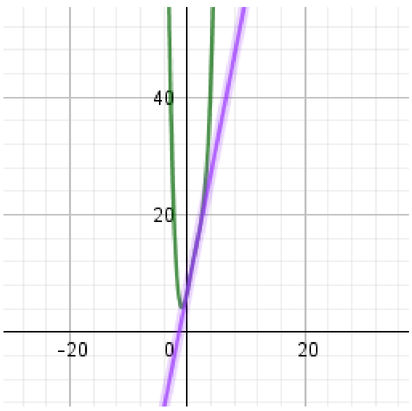
2. Si $f = \mathbf{e}^u$ alors $f' = u'\mathbf{e}^u$.
Ici, la fonction h est de la forme $\mathbf{e}^u$ avec pour tout $x \in \mathbb{R},\ u(x) = 4 - 3x$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R},\ h'(x) = -3\mathbf{e}^{4-3x}$.
3. Si $f = \dfrac{1}{u}$ alors $f' = \dfrac{-u'}{u^2}$.
Ici, la fonction p est de la forme $\dfrac{3}{u}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}\,,\ u(x) = x + 2$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}\,,\ p'(x) = 3\dfrac{-1}{(x+2)^2} = \dfrac{-6}{(x+2)^2}$.
4. Si $f = \dfrac{u}{v}$ alors $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
Ici, q est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R},\ u(x) = 3x+3$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{5}\right\},\ v(x) = 5x - 1$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{5}\right\},\ q'(x) = \dfrac{3(5x-1) - 5(3x+3}{(5x-1)^2} = \dfrac{-18}{(5x-1)^2}$.

Exercice 9.

L'équation de la tangente à la courbe de f au point a est de la forme $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Pour étudier la position de la courbe par rapport à la tangente, on étudie la convexité de la fonction f.
Si $f'' \geq 0$ alors la fonction f est convexe et sa courbe est au dessus de la tangente.

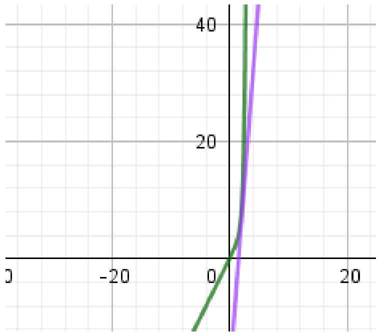
1. $f(0) = 7$ et pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{4} \times 4x^3 - 3x^2 + 2 \times 2x + 5 = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ donc $f'(0) = 5$.
La tangente à la courbe en 0 a pour équation $T_0 : y = 5x + 7$.
Pour étudier la convexité, on dérive une seconde fois la fonction f.
Pour tout $x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 3x^2 - 6x + 4$.
f'' est donc un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3,\ b = -6$ et $c = 4$.

Pour étudier le signe d'un trinôme, on commence par chercher les racines.
Ici, $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 36 - 48 = -12 < 0$. Donc, f'' est toujours du signe de $a > 0$.
Donc, $f'' \geq 0$ et on en déduit que f est convexe.
La courbe de f est donc au dessus de la tangente au point 0.



2. $g(2) = 4\mathbf{e}^{3\times2-6} + 2 \times 2 = 8$ et pour tout $x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 12\mathbf{e}^{3x-6} + 2$ donc $g'(2) = 14$.
La tangente à la courbe en 2 a pour équation $T_2 : y = 14(x-2) + 8 = 14x - 20$.

Pour étudier la convexité, on dérive une seconde fois la fonction f.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = 36\mathbf{e}^{3x-6}$. Or, une exponentielle est toujours positive donc $g'' \geq 0$.
On en déduit que la fonction g est convexe et que la courbe de g est au dessus de la tangente en 2.



Exercice 10.
Une primitive d'une fonction f sur $]1;+\infty[$ est une fonction F dérivable sur $]1;+\infty[$ telle que $F' = f$.
Toutes les primitives d'une fonction f sont égales à une constante près.

1. Si f est de la forme $x \mapsto x^n$ avec n un entier strictement positif alors $F : x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de f sur un intervalle $\mathbb{R}$.
   Si on note $F : x \mapsto 5\dfrac{x^4}{4} + x^3 + x$ alors pour tout $x \in]1;+\infty[$, $F'(x) = \dfrac{5}{4} \times 4x^3 + 3x^2 + 1 = 5x^3 + 3x^2 + 1$ donc F est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.
2. Si f est de la forme $u'\mathbf{e}^u$ alors $F = \mathbf{e}^u$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Si f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ alors $F = \ln(u)$ est une primitive de f sur un intervalle I.
   Si on note $G_1 : x \mapsto \mathbf{e}^{7x-4}$ alors pour tout $x \in]1;+\infty[$, $G_1'(x) = 7\mathbf{e}^{7x-4}$ donc G_1 est une primitive de $x \mapsto 7\mathbf{e}^{7x-4}$ sur $]1;+\infty[$.
   De même, si on note $G_2 : x \mapsto \ln(x)$ alors pour tout $x \in]1;+\infty[$, $G_2'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc G_2 est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]1;+\infty[$.
   Par somme, on en déduit que $x \mapsto \mathbf{e}^{7x-4} + \ln(x)$ est une primitive de g sur $]1;+\infty[$.
3. Si f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ alors $F = \ln(u)$ est une primitive de f sur un intervalle I.
   On en déduit que $x \mapsto 10\ln(x-1)$ est une primitive de h sur $]1;+\infty[$.

4 Suites numériques

4.1 Exercices

Exercice 11. Déterminer les limites des suites suivantes

1. pour tout naturel n, $u_n = \dfrac{5}{n^2}$.
2. pour tout naturel n, $s_n = -4n^2 + n - 12$.

3. pour tout naturel n, $f_n = \dfrac{9 - \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 1}$.
4. pour tout naturel n, $p_n = \dfrac{n+9}{-n^2+7}$.

Exercice 12. Pour les suites proposées, dire si elles sont arithmétiques, géométriques ou aucun des deux.
Quand c'est possible, définir la raison et le premier terme.

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5^{n+2}$
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{-2}{3^n}$
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 3n - 2$
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = (n+1)^2 - n^2$
5. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = n^2 + n + 1$

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = -3u_n + 12$. Déterminer la formule explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.2 Corrigés

Exercice 11.
Le tableau suivant donne la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$ en fonction de la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et de celle de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
ℓ	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$

Le tableau suivant donne la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$ en fonction de la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et de celle de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$
0	**F.I.**	0	0	0	**F.I.**
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$

Le tableau suivant donne la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$ en fonction de la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et de celle de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$\ell'<0$	0^-	0^+	$\ell'>0$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
$\ell<0$	0^+	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^-
0^-	0^+	0^+	**F.I.**	**F.I.**	0^-	0^-
0^+	0^+	0^-	**F.I.**	**F.I.**	0^+	0^+
$\ell>0$	0^-	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^+
$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**

La notation **F.I.** correspond à forme indéterminée et signifie qu'il faut modifier l'expression de la quantité étudiée pour pouvoir conclure.
En résumé, les formes indéterminées sont

$$+\infty-\infty,\quad -\infty+\infty,\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0}$$

1. Il s'agit d'un quotient avec le numérateur qui tend vers 5 et le dénominateur qui tend vers $+\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n^2}=0$.
2. Il s'agit d'une somme de deux suites. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -4n^2=-\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-12=+\infty$ donc c'est une forme indéterminée.
   Dans le cas d'une forme indéterminée $-\infty+\infty$, on met en facteur le terme qui tend le plus vite vers ∞.
   $$s_n=-4n^2+n-12=n^2\left(-4+\frac{n}{n^2}-\frac{12}{n^2}\right)=n^2\left(-4+\frac{1}{n}-\frac{12}{n^2}\right)$$
   Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-4+\dfrac{1}{n}-\dfrac{12}{n^2}\right)=-4$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=+\infty$.
   Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=-\infty$.
3. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(9-\dfrac{1}{n}\right)=9$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right)=-1$.
   Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=-9$.
4. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+9)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n+7)=-\infty$ donc c'est une forme indéterminée.
   Dans le cas d'une forme indéterminée $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, on met en facteur, au numérateur et au dénominateur, le terme qui tend le plus vite vers ∞.
   $$p_n=\frac{n+9}{-n^2+7}=\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n^2\left(-1+\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{1}{n}\times\frac{1+\frac{9}{n}}{-1+\frac{7}{n^2}}$$

Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{9}{n}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-1+\dfrac{7}{n^2}\right)=-1$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{9}{n}}{-1+\dfrac{7}{n^2}}=$ -1.
On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.
Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=0$.

Exercice 12.
On dit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique lorsqu'il existe un réel r tel que pour tout entier n, $a_n=a_0+nr$.
ou alors lorsqu'il existe un réel r tel que pour tout entier n, $a_{n+1}-a_n=r$.

On dit que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que pour tout entier n, $b_n=b_0\times q^n$.
ou alors lorsqu'il existe un réel q tel que pour tout entier n, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=q$.

1. pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=5^{n+2}=5^2\times 5^n=25\times 5^n$ donc on reconnait une suite géométrique de premier terme 25 et de raison $q=5$.
2. pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{-2}{3^n}=-2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ donc on reconnait une suite géométrique de premier terme -2 et de raison $q=\dfrac{1}{3}$.
3. On reconnait une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme -2.
4. pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_n=(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n2=2n+1$ donc on reconnait une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
5. On calcule les 3 premiers termes de la suite : $t_0=1$, $t_1=1+1+1=3$ et $t_2=2^2+2+1=7$.
   Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique alors t_1-t_0 et t_2-t_1 ont la même valeur.
   Or, $t_1-t_0=2$ et $t_2-t_1=4$.
   Donc, ce n'est pas une suite arithmétique.

   Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique alors $\dfrac{t_1}{t_0}$ et $\dfrac{t_2}{t_1}$ ont la même valeur.
   Or, $\dfrac{t_1}{t_0}=3$ et $\dfrac{t_2}{t_1}=\dfrac{7}{3}\neq 3$.
   Donc, ce n'est pas une suite géométrique.

Exercice 13.
La résolution se fait en 3 étapes.

- On cherche une suite constante vérifiant la même relation.
  On résout l'équation $x=-3x+12$.

$$x=-3x+12\Leftrightarrow 4x=12\Leftrightarrow x=3$$

  Donc la suite constante égale à 3 vérifie cette relation.

- On définit la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$.
  On montrer que cette suite est géométrique. Pour $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -3u_n + 12 - 3 = -3u_n + 9 = -3(u_n - 3) = -3v_n$$

  Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -1$.
  On en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -1 \times (-3)^n$.
- On peut alors en déduire l'expression de (u_n).
  Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 3 = -(-3)^n + 3$.